

Котельников А.Г.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Часть I

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Конспект лекций

ЛЕКЦИЯ 1

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.

Содержание теории электрических цепей как прикладной науки составляют задачи анализа и синтеза электрических цепей, т.е. анализа свойств заданных электрических цепей и построения электрических цепей с заданными свойствами. Содержание данного курса ограничено изучением анализа установившегося режима линейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами.

Электрическая цепь, совокупность различных устройств и соединяющих их проводников (или элементов электропроводящей среды), по которым может протекать электрический ток.

Линейная электрическая цепь, электрическая цепь, состоящая только из элементов с линейными характеристиками. Для линейной цепи выполняется принцип суперпозиции.

Процессы, протекающие в электрических цепях, могут быть описаны при помощи понятий об эдс, токе и напряжении.

Электродвижущая сила (эдс), величина, характеризующая источник энергии неэлектрической природы в электрической цепи, необходимый для поддержания в ней электрического тока. Эдс численно равна работе по перемещению единичного положительного заряда вдоль замкнутой цепи. Полная эдс в цепи постоянного тока равна разности потенциалов на концах разомкнутой цепи. Эдс индукции создается вихревым электрическим полем, порождаемым переменным магнитным полем.

$$e_{\text{стор}} = \int_{\delta}^a E_{\text{стор}} d\mathbf{l}, B, \quad e_{\text{инд}} = \int_{\delta}^a E_{\text{инд}} d\mathbf{l}, B$$

$E_{\text{стор}}$ - сторонняя напряженность электрического поля;

$E_{\text{инд}}$ - напряженность электрического поля, обусловленная изменением электромагнитной индукции.

Электрический ток, направленное (упорядоченное) движение заряженных частиц: электронов, ионов и др. Условно за направление электрического тока принимают направление движения положительных зарядов.

Сила тока, равна электрическому заряду, проходящему через поперечное сечение проводника в 1 с.

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t), A.$$

Если необходимо учесть неравномерность распределения тока по сечению проводника, то

$$i(t) = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S}, A, \text{ где } \mathbf{J} \text{ -плотность тока, } \frac{A}{m^2}.$$

Напряжение, то же, что разность потенциалов между двумя точками электрической цепи; на участке цепи, не содержащей электродвижущую силу, равно произведению силы тока на сопротивление участка.

Разность потенциалов между двумя точками, равна работе электрического поля по перемещению единичного положительного заряда из одной точки поля в другую.

$$u_{a\delta} = \varphi_a - \varphi_{\delta} = \int_{\delta}^a (E_{\text{ном}} + E_{\text{инд}}) d\mathbf{l}, B$$

$E_{\text{ном}}$ - потенциальная напряженность электрического поля, создаваемая распределением электрических зарядов и выражаемая законом Кулона.

Потенциал, равен работе электрического поля по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля.

$$\varphi_a = \int_{\infty}^a (E_{nom} + E_{ind}) d\mathbf{l}, B$$

Напряжение и ток есть величины алгебраические, т.е. они имеют знак и поэтому для их определения необходимо установить направление для отсчета положительного значения величины. В ТОЭ для токов и напряжений это делается с помощью стрелочек на схеме.

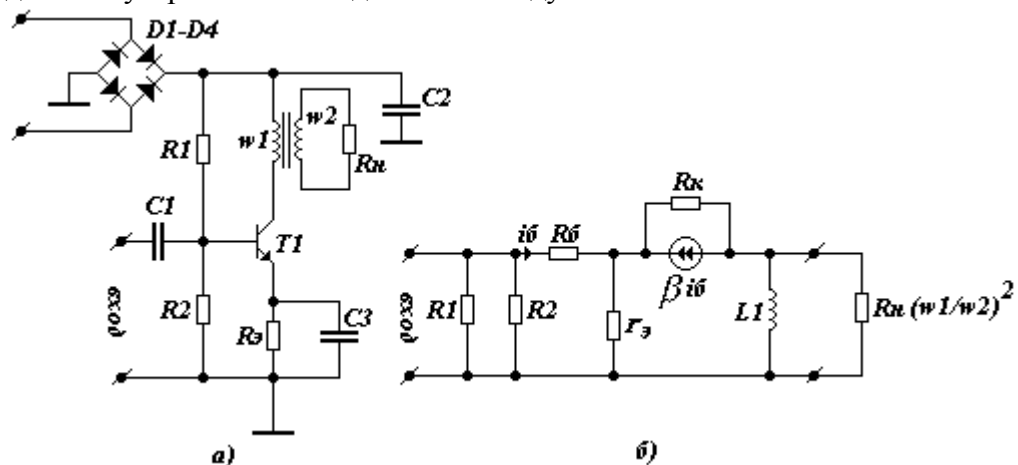
В ТОЭ принято мгновенную величину тока, напряжения и потенциала обозначать строчными буквами латинского алфавита

$$i \text{ или } i(t), u \text{ или } u(t), \varphi \text{ или } \varphi(t).$$

Описание электрической величины мгновенной величиной даёт представление о значении величины в любой момент времени. Мгновенную величину можно наблюдать с помощью осциллографа.

Анализ реальной электрической цепи осуществляется над её электрической схемой. Следует различать принципиальную электрическую схему и расчётную схему см. пример на рис. 1.1. Иначе расчётную схему ещё называют схемой замещения или схемной моделью.

Электрическая схема, графическое изображение электрических цепей электронных, электро- или радиотехнических устройств, на котором условными обозначениями показаны элементы данного устройства и соединения между ними.



а) Принципиальная схема транзисторного усилителя переменного сигнала.

б) Схема замещения транзисторного усилителя переменного сигнала с использованием линейной модели транзистора и модели совершенного трансформатора в режиме по переменному току.

Рис. 1.1.

Схемной модели ставится в соответствие математическая модель, над которой можно проводить вычисления электрических величин (токов, напряжений и др.). Именно такая работа, в основном, ждёт нас в курсе ТОЭ. Получение схемной модели устройства (объекта), получение его математической модели и выполнение вычислительных операции над ней с целью обнаружения свойств - всё это объединяется понятием моделирование. Переход от реальной цепи к её схеме осуществляется с принятием ряда допущений, призванных отбросить всё несущественное и сохранить те особенности объекта, которые отражают основные, интересные в данном исследовании связи и свойства объекта. Схема является результатом абстрагирования, идеализацией реальной цепи.

Моделирование - исследование каких-либо явлений, процессов или систем объектов путем построения и изучения их моделей. Использование моделей для определения или уточнения характеристик и рационализации способов построения вновь конструируемых объектов. Моделирование — одна из основных категорий теории познания: на идее

моделирования по существу базируется любой метод научного исследования — как теоретический (при котором используются различного рода знаковые, абстрактные модели), так и экспериментальный (использующий предметные модели).

Элементы электрических цепей.

Существует всего два типа элементов цепей – источники (активные элементы) и потребители или приёмники (пассивные элементы) электрической энергии.

Источники

Эдс - источник напряжения, т.е. источник электрической энергии, у которого напряжение на зажимах не зависит от протекающего тока.

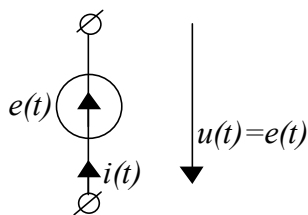


Рис. 1.2. Обозначение эдс на схемах цепей.

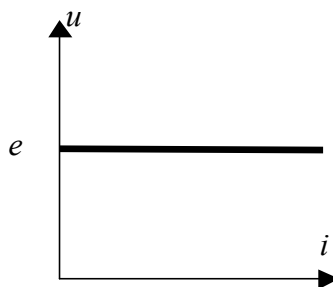


Рис. 1.3. Вольт-амперная характеристика источника напряжения

Источник тока – это источник электрической энергии, ток через который не зависит от нагрузки, т.е. напряжения возникающего на его зажимах.

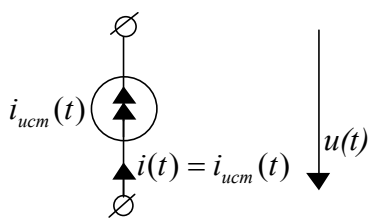


Рис. 1.4. Обозначение источника тока на схемах.

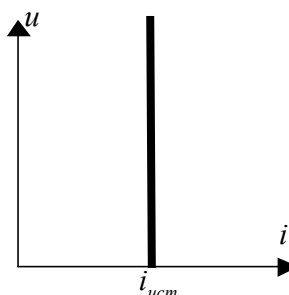


Рис. 1.5. Вольт-амперная характеристика источника тока.

Приёмники

Резистор (активное сопротивление) – элемент, при протекании через который электрического тока происходит необратимое преобразование электрической энергии в тепловую энергию.

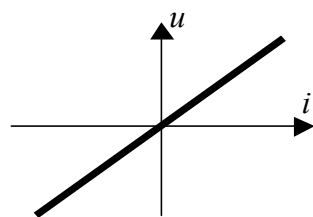
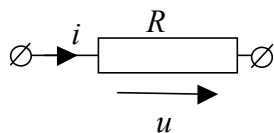


Рис. 1.5. Вольт – амперная характеристика линейного резистора.

Связь напряжения на зажимах резистора с током определяется по компонентному уравнению

$$u = Ri - \text{закон Ома (Г. С. Ом, 1826 г.),}$$

$$i = Gu$$

R – сопротивление резистора, Ом;

G - проводимость, $\frac{1}{\text{Ом}}$ или См

(Сименс).

Индуктивность (реактивное сопротивление, катушка, дроссель) – элемент, способный энергию источников цепи накопить в виде энергии магнитного поля

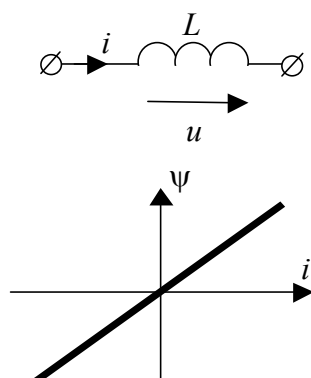


Рис. 1.6. Вебер – амперная характеристика линейной индуктивности.

$$\psi = Li$$

ψ – потокосцепление, Вб (Вебер);
 L – индуктивность, Гн (Генри).

Связь между напряжением и током определяется по компонентному уравнению

$$u = \frac{d}{dt}\psi = L \frac{d}{dt}i \text{ - закон электромагнитной}$$

индукции (Фарадей, 29 августа 1831 г.),

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt + i(0).$$

Ёмкость (реактивное сопротивление, конденсатор) – элемент, способный энергию источников цепи накопить в виде энергии электрического поля.

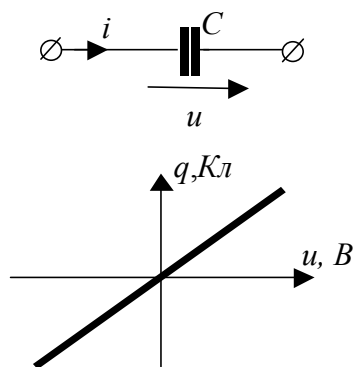


Рис. 1.6. Кулон – вольтная характеристика линейного конденсатора.

$$q = Cu$$

q – заряд, Кл (Кулон);
 C – ёмкость, Ф (Фарад).

Связь между напряжением и током определяется по компонентному уравнению

$$i(t) = \frac{d}{dt}q(t) = C \frac{d}{dt}u(t),$$

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u(0).$$

Топология электрической цепи.

При анализе для определения топологии цепи используют ряд понятий.

Ветвь – участок цепи, состоящий из последовательно включённых элементов с одним и тем же током.

Узел – место или точка соединения двух и более ветвей.

Контур – любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям, при этом каждый узел в рассматриваемом контуре встречается не более одного раза.

Независимый контур – контур, который нельзя получить комбинацией ранее выбранных контуров. У независимого контура имеется хотя бы одна ветвь не принадлежащая другим контурам.

Граф электрической цепи – условное изображение цепи, на котором ветви показаны линиями, узлы – точками. Нумерация ветвей и узлов делается арабскими цифрами, а для их различия номера узлов обводят кружком. Ветви и узлы нумеруются произвольно, начиная с первой, а узлы начинают нумеровать с 0. Замечание. Источники тока в граф не входят.

Дерево графа – часть графа, не имеющая ни одного контура и включающая все узлы.

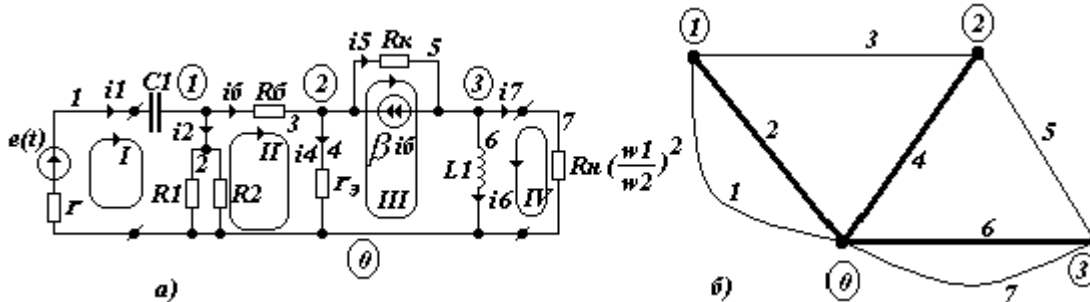
Связи графа (хорда) – ветви не входящие в дерево графа.

Если возникают трудности при выборе независимых контуров, то следует изобразить на графе цепи дерево и затем путём добавления к нему связей получить набор независимых

контуров. Число независимых контуров, таким образом, определяется по топологической формуле

$$n = p - g + 1, \text{ где} \quad (1.1)$$

n – число независимых контуров;
 p – число ветвей;
 g – число узлов.



а) Расчетная схема усилителя переменного сигнала.
 б) Граф схемы.

Рис. 1.7.

При изображении графа было принято объединить ветви резисторов $R1$, $R2$ в одну ветвь и ветви дерева изобразить жирными линиями. В цепи имеются четыре независимых контура: $n = p - g + 1 = 7 - 4 + 1 = 4$.

Основные законы электрических цепей.

Закон Ома. Для участка электрической цепи (проводника), не содержащего источников электродвижущей силы, устанавливает связь между силой тока в проводнике и разностью потенциалов (напряжением) на его концах: сила тока прямо пропорциональна напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению проводника.

$$i = \frac{1}{R} u.$$

Законы Кирхгофа. Они были установлены опытным путём немецким физиком Г. Р. Кирхгофом в 1847 г. Законы Кирхгофа позволяют рассчитывать любые электрические цепи постоянного и квазистационарного тока.

Согласно первому закону Кирхгофа, *алгебраическая сумма сил токов в точке разветвления проводников (узле) равна нулю*

$$\sum I = 0. \quad (1.2)$$

Согласно второму закону Кирхгофа, *алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных участках контура, произвольно выделенного в сложной разветвленной цепи, равна алгебраической сумме электродвижущих сил в этом контуре*

$$\sum U = \sum E. \quad (1.3)$$

Поскольку источник эдс всегда можно представить его напряжением, то употребляется также иная формулировка второго закона Кирхгофа:

алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных участках контура, произвольно выделенного в сложной разветвленной цепи, равна 0, т. е.

$$\sum U = 0. \quad (1.4)$$

На основе уравнений Кирхгофа получим интегро-дифференциальные уравнения для нахождения токов в ветвях схемы на рис. 1.7. а.

Узел 0: $i_1 - i_2 + i_4 + i_6 + i_7 = 0;$

Узел 1: $i_1 - i_2 - i_6 = 0;$

Узел 2: $i_6 - i_4 + i_5 + \beta i_6 = 0;$

Узел 3: $i_5 - i_6 - i_7 + \beta i_6 = 0;$

Контур I: $ri_1 + u_{C1} + R_{12}i_2 = e(t); ri_1 + \frac{1}{C1} \int_0^t i_1 dt + u_{C1}(0) + R_{12}i_2 = e(t);$

Контур II: $-R_{12}i_2 + R_6 i_6 + r_3 i_4 = 0;$

Контур III: $-r_3 i_4 + R_k i_5 + u_{L1} = 0; -r_3 i_4 + R_k i_5 + L_1 \frac{d}{dt} i_6 = 0;$

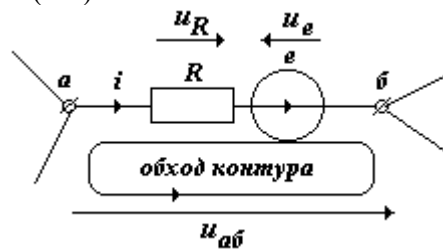
Контур IV: $u_{L1} - R_H \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 i_7 = 0; L_1 \frac{d}{dt} i_6 - R_H \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 i_7 = 0.$

Среди полученных уравнений независимыми будут четыре уравнения по второму закону Кирхгофа и три уравнения по первому закону Кирхгофа. Одно из уравнений по первому закону Кирхгофа может быть получено из уравнений для других узлов и поэтому не является независимым.

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 - i_2 - i_6 = 0, \\ i_6 - i_4 + i_5 + \beta i_6 = 0, \\ i_5 - i_6 - i_7 + \beta i_6 = 0, \\ ri_1 + \frac{1}{C1} \int_0^t i_1 dt + u_{C1}(0) + R_{12}i_2 = e(t), \\ -R_{12}i_2 + R_6 i_6 + r_3 i_4 = 0, \\ -r_3 i_4 + R_k i_5 + L_1 \frac{d}{dt} i_6 = 0, \\ L_1 \frac{d}{dt} i_6 - R_H \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 i_7 = 0. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Решая совместно семь независимых уравнений, находим токи ветвей.

Обобщённый закон Ома (закон Ома для участка цепи с эдс). Для участка цепи с эдс ток может быть найден по формуле (1.5)



$$-u_R + u_e + u_{a\bar{b}} = 0, \quad -Ri + e + u_{a\bar{b}} = 0,$$

$$i = \frac{u_{a\bar{b}} + e}{R}.$$

В общем случае

$$i = \frac{u_{a\bar{b}} + \sum e}{\sum R} \quad (1.5)$$

Правило. Чтобы определить ток на участке цепи с эдс необходимо:

- 1) Из потенциала точки, от которой “уходит” ток, вычесть потенциал точки куда он “входит”.
- 2) К полученной разнице прибавить эдс, если она направлена по току или вычесть эдс, если она направлена против тока.
- 3) Полученный результат разделить на суммарное сопротивление участка.

ЛЕКЦИЯ 2

АНАЛИЗ УСТАНОВИВШЕГОСЯ СИНУСОИДАЛЬНОГО РЕЖИМА ЦЕПИ.

Если в цепи действуют источники синусоидальной формы одной частоты и нас интересует только установившийся режим, то решение системы интегро-дифференциальных уравнений Кирхгофа относительно токов ветвей может быть сведено к решению системы алгебраических уравнений. Такое упрощение анализа цепи возможно за счёт свойства линейности.

Интерес к установившемуся режиму цепей синусоидального тока обусловлен рядом причин. Во – первых, вращающиеся электрические машины электрических станций вырабатывают напряжение синусоидальной формы.

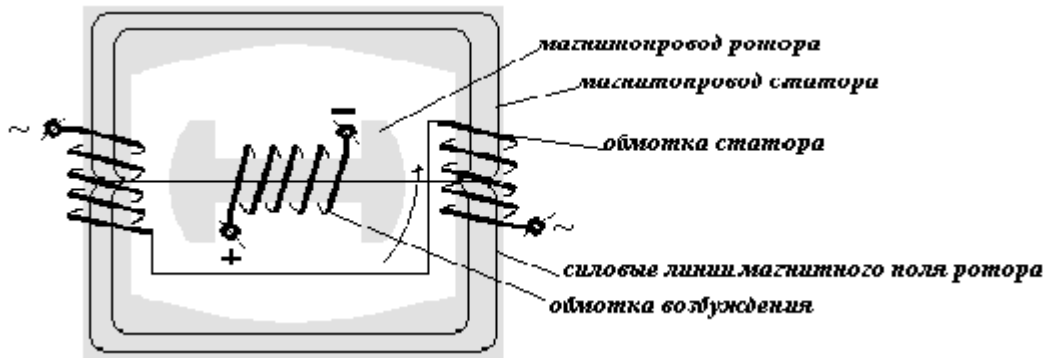
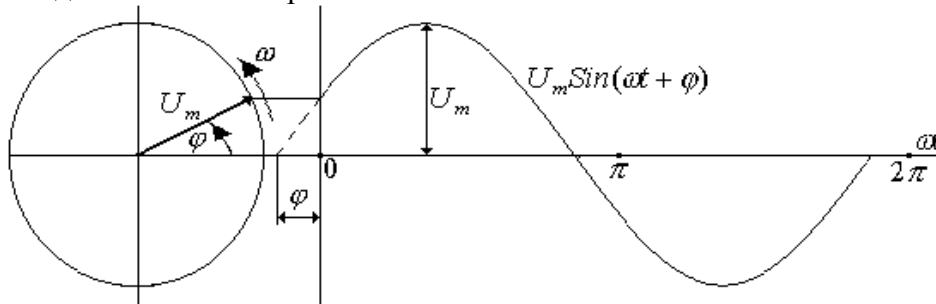


Рис. 2.1. Модель генератора переменного напряжения.

Во – вторых, элементы линейных цепей не искажают сигналы синусоидальной формы. Покажем это, но сначала охарактеризуем синусоидальную величину.

Кривая значения, которой изменяются по синусоидальному закону, может быть получена, как проекция конца вектора вращающегося с постоянной частотой на равномерно движущуюся под ним плоскость рис. 2.2.



U_m - амплитуда синусоидальной функции;

$\omega t + \varphi$ - фаза синусоидальной функции [рад], [град];

φ - начальная фаза синусоидальной функции [рад], [град];

t - независимая переменная (время) [с];

$\omega = 2\pi f$ - угловая (круговая частота) $[\frac{рад}{с}]$ или $[\frac{град}{с}]$;

$f = \frac{1}{T}$ - циклическая частота [Гц]; T - период [с];

Рис. 2.2.

В электроснабжении напряжение принято характеризовать величиной его действующего значения. Частота во всей энергосистеме страны относительно постоянна и примерно равна $f=50$ Гц ($T=0.02с=20мс$). Под действующим значением понимается величина вычисляемая по формуле

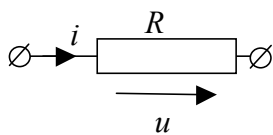
$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} u^2 dt}.$$

Для синусоидального сигнала величина действующего значения в $\sqrt{2}$ раз меньше его амплитудного значения.

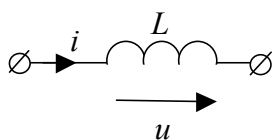
$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} (U_m \sin(\omega t + \varphi))^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} U_m^2 \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)) dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \left(\int_t^{t+T} \frac{1}{2} dt - \underbrace{\int_t^{t+T} \cos(2\omega t + 2\varphi) dt}_0 \right)} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Для измерения действующего значения тока и напряжения используют, например, стрелочные амперметры и вольтметры с электромагнитной системой измерительного механизма.

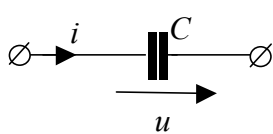
Отклик элементов R, L, C на синусоидальное воздействие.



Пусть на зажимах резистора будет задан ток $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$, тогда его реакцией будет напряжение $u_R = R \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$. R – активное сопротивление.



Пусть на зажимах катушки будет задан ток $i_L = I_m \sin(\omega t + \varphi_j)$, тогда её реакцией будет напряжение $u_L = L \frac{d}{dt} i = L \frac{d I_m \sin(\omega t + \varphi_i)}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \omega L I_m \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) = X_L I_m \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) = U_m \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})$. $X_L = \omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление,



Пусть на зажимах конденсатора будет задано напряжение $u_C = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$, тогда его реакцией будет ток $i_C = C \frac{d}{dt} u = C \frac{d U_m \sin(\omega t + \varphi_u)}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = \omega C U_m \sin(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{X_C} U_m \sin(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}) = I_m \sin(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2})$. $X_C = \frac{1}{\omega C}$ – реактивное ёмкостное сопротивление.

Вывод. Элементы линейной цепи обладают свойством поддерживать синусоидальный режим. Для амплитуд и действующих значений синусоидальных токов и напряжений выполняется соотношение аналогичное закону Ома:

$$\begin{aligned} U_{Rm} &= R I_m, & U_R &= R I, \\ U_{Lm} &= X_L I_m, & U_L &= X_L I, \\ U_{Cm} &= X_C I_m, & U_C &= X_C I. \end{aligned}$$

Этот вывод позволяет нам для анализа установившегося режима цепи синусоидального тока свести систему интегро-дифференциальных уравнений, полученных по законам Кирхгофа, к системе алгебраических уравнений.

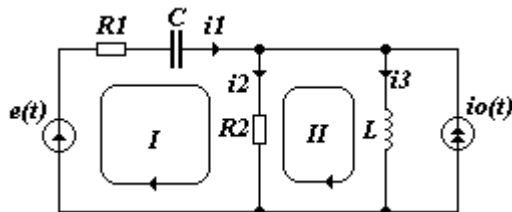


Рис. 2.3.

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 - i_2 - i_3 + i_0 = 0, \\ R_1 i_1 + \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt + u_c(0) + R_2 i_2 = e, \\ -R_2 i_2 + L \frac{d}{dt} i_3 = 0 \end{array} \right\},$$

Пусть $e(t) = U_m \sin(\omega t)$, $i_0(t) = I_{m0} \sin(\omega t + \varphi_0)$ и $u_c(0) = 0$, тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) - I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2) - I_{3m} \sin(\omega t + \varphi_3) + I_{0m} \sin(\omega t + \varphi_0) = 0 \\ R_1 I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) - X_C I_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) + R_2 I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2) = U_m \sin(\omega t) \\ -R_2 I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2) + X_L I_{3m} \cos(\omega t + \varphi_3) = 0 \end{array} \right\}.$$

Для двух моментов времени $t_1 = kT$ и $t_2 = kT \pm \alpha T$, где $\alpha = (0..0.25)$ и $k = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ получаем систему уравнений для неизвестных амплитуд и начальных фаз токов ветвей. Пусть $k=0$, а $\alpha = 0.25$, тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{1m} \sin(\varphi_1) - I_{2m} \sin(\varphi_2) - I_{3m} \sin(\varphi_3) + I_{0m} \sin(\varphi_0) = 0 \\ R_1 I_{1m} \sin(\varphi_1) - X_C I_{1m} \cos(\varphi_1) + R_2 I_{2m} \sin(\varphi_2) = 0 \\ -R_2 I_{2m} \sin(\varphi_2) + X_L I_{3m} \cos(\varphi_3) = 0 \\ I_{1m} \cos(\varphi_1) - I_{2m} \cos(\varphi_2) - I_{3m} \cos(\varphi_3) + I_{0m} \cos(\varphi_0) = 0 \\ + R_1 I_{1m} \cos(\varphi_1) + X_C I_{1m} \sin(\varphi_1) + R_2 I_{2m} \cos(\varphi_2) = U_m \\ -R_2 I_{2m} \cos(\varphi_2) - X_L I_{3m} \sin(\varphi_3) = 0 \end{array} \right\}$$

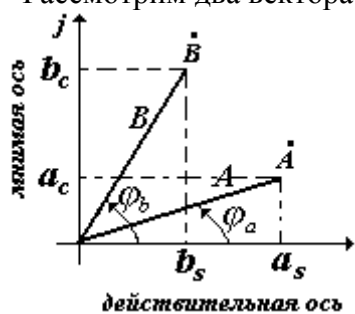
Эту систему алгебраических уравнений в принципе можно решить относительно шести неизвестных, но на практике такой способ анализа не имеет применения из-за сложности решения системы нелинейных уравнений большого порядка. За изобретение более удобного способа анализа установившегося режима цепей синусоидального тока мы обязаны американскому инженеру немецкого происхождения Чарлз П. Штейнметцу (1865-1923). В 1893 году он предложил так называемый **комплексный метод расчёта** синусоидальных режимов, который даёт математическую модель цепи в виде системы линейных алгебраических уравнений, но об этом методе в следующей лекции.

ЛЕКЦИЯ 3

КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА СИНУСОИДАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ.

Определение установившегося режима цепи синусоидального тока, как было показано в предыдущей лекции, заключается в нахождении амплитуд и начальных фаз токов ветвей схемы. Действительно, синусоидальные функции одной частоты отличаются друг от друга по двум параметрам: амплитуде и фазе.

Рассмотрим два вектора на комплексной плоскости рис. 3.1.



A, B – модуль векторов \dot{A} и \dot{B} .
 φ_a, φ_b - аргумент векторов \dot{A} и \dot{B} .

Рис. 3.1.

Комплексное число задаёт вектор на плоскости.

$$\dot{B} = b_s + jb_c = B \angle \varphi_b = B e^{j\varphi_b}$$

$$\dot{A} = a_s + ja_c = A \angle \varphi_a = A e^{j\varphi_a}$$

$$B = \sqrt{b_s^2 + b_c^2}, \quad \varphi_b = \text{Arctg}\left(\frac{b_c}{b_s}\right)$$

$$A = \sqrt{a_s^2 + a_c^2}, \quad \varphi_a = \text{Arctg}\left(\frac{a_c}{a_s}\right)$$

$$b_c = B \cdot \text{Cos}(\varphi_b), \quad b_s = B \cdot \text{Sin}(\varphi_b)$$

$$a_c = A \cdot \text{Cos}(\varphi_a), \quad a_s = A \cdot \text{Sin}(\varphi_a)$$

Отличие этих векторов друг от друга то же определяется двумя параметрами либо модулем и аргументом, либо величиной проекции на действительную и мнимую оси комплексной плоскости. Используя эту аналогию, можно отобразить синусоидальную величину на комплексную плоскость в виде вектора.

Оригинал $U_m \text{Sin}(\omega t + \varphi)$ —————> Изображение $\dot{U}_m(j\omega) = U_m \angle \varphi$ - комплекс амплитудного значения,

или

$\sqrt{2}U \cdot \text{Sin}(\omega t + \varphi)$ —————> $\dot{U}(j\omega) = U \angle \varphi$ - комплекс действующего значения.

Посмотрим, к каким изменениям на комплексной плоскости приводят операции над оригиналами во временной области.

Сложению синусоидальных функций в области действительного переменного t , соответствует операция сложения векторов.

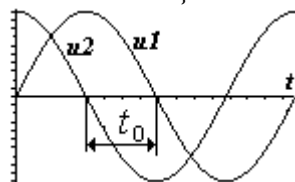
$$u_1 = U_{1m} \text{Sin}(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2 = U_{2m} \text{Sin}(\omega t + \varphi_2)$$

$$u_1 + u_2 \rightarrow \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 = (u_{1s} + ju_{1c}) + (u_{2s} + ju_{2c}) = (u_{1s} + u_{2s}) + j(u_{2c} + u_{1c})$$

Смещение во времени оригинала приводит к повороту вектора



$$u_1(t) = \sqrt{2}U \cdot \text{Sin}(\omega t + \varphi)$$

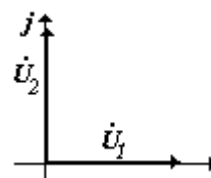
$$u_2(t) = u_1(t + t_0)$$

$$u_1 \rightarrow \dot{U}_1 = U \angle \varphi = U e^{j\varphi}$$

$$u_2 \rightarrow \dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{j(\omega t_0)} =$$

$$U \angle (\varphi + \omega t_0).$$

$e^{j\alpha}$ - вектор поворота.



Умножению оригинала на константу приводит к умножению вектора на константу.

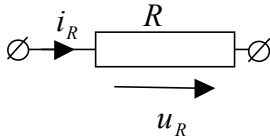
$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\alpha \times u \rightarrow \alpha \times \dot{U}$$

Изображение элементов R, L, C в комплексной области.

Отобразим ток и напряжение на элементах R, L, C на комплексную плоскость, воспользуемся законом Ома в комплексной форме и получим схемное изображение элементов R, L, C в комплексной области.

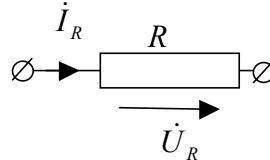
Оригинал



$$i_R = I_{Rm} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$u_R = RI_{Rm} \sin(\omega t + \varphi) = U_{Rm} \sin(\omega t + \varphi)$$

Изображение



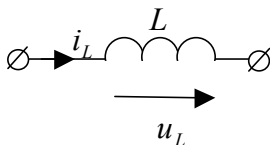
$$\dot{I}_R = I_R e^{j\varphi}$$

$$\dot{U}_R = RI_R e^{j\varphi}$$

$$\dot{U}_R = \underline{Z}_R \dot{I}_R$$

$$\underline{Z}_R = \frac{\dot{U}_R}{\dot{I}_R} = R$$

$\underline{Z}_R = R$ - активное комплексное сопротивление

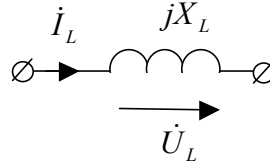


$$i_L = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$u_L = L \frac{d}{dt} i_L$$

$$u_L =$$

$$U_{Lm} \sin(\omega t + \varphi) = \omega L I_{Lm} \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$



$$\dot{I}_L = I_L e^{j\varphi}$$

$$\dot{U}_L = \omega L I_L e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} =$$

$$\omega L I_L e^{j(\varphi)} e^{j(\frac{\pi}{2})} =$$

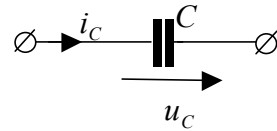
по формуле Эйлера

$$\omega L I_L e^{j(\varphi)} (\cos(\frac{\pi}{2}) + j \sin(\frac{\pi}{2})) = j \omega L I_L e^{j(\varphi)}$$

$$\dot{U}_L = \underline{Z}_L \dot{I}_L$$

$$\underline{Z}_L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L} = j \omega L = jx_L$$

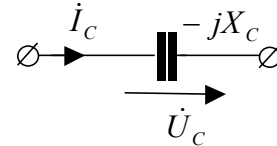
$\underline{Z}_L = jx_L$ - комплексное индуктивное сопротивление



$$u_C = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i_C = C \frac{d}{dt} u_C$$

$$I_{Cm} \sin(\omega t + \varphi) = \omega C \cdot U_{Cm} \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$



$$\dot{U}_C = U_C e^{j\varphi}$$

$$\dot{I}_C = \omega C U_C e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} =$$

$$\omega C U_C e^{j(\varphi)} e^{j(\frac{\pi}{2})} =$$

по формуле Эйлера

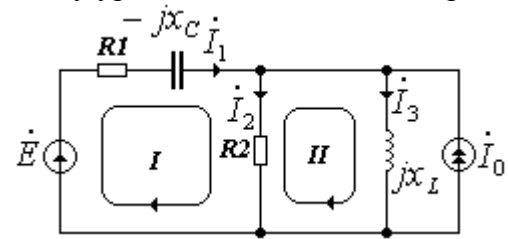
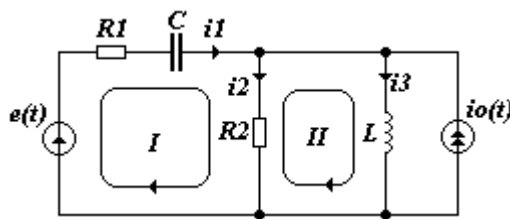
$$\omega C U_C e^{j\varphi} (\cos(\frac{\pi}{2}) + j \sin(\frac{\pi}{2})) = j \omega C U_C e^{j\varphi}$$

$$\dot{U}_C = \underline{Z}_C \dot{I}_C$$

$$\underline{Z}_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \frac{U_C e^{j\varphi}}{j \omega C U_C e^{j\varphi}} = -j x_C$$

$\underline{Z}_C = -j x_C$ - комплексное ёмкостное сопротивление.

Используя комплексные схемы замещения элементов R, L, C , отобразим схему на рис. 2.3. в комплексную область и составим для неё систему уравнений по законам Кирхгофа.



$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 + i_0 = 0, \\ R_1 i_1 + \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt + u_C(0) + R_2 i_2 = e, \rightarrow \\ -R_2 i_2 + L \frac{d}{dt} i_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 + \dot{I}_0 = 0, \\ R_1 \dot{I}_1 + (-j x_C) \dot{I}_1 + R_2 \dot{I}_2 = \dot{E}, \\ -R_2 \dot{I}_2 + j x_L \dot{I}_3 = 0; \end{cases}$$

Вывод: Для расчета установившихся токов в ветвях цепи синусоидального тока необходимо построить комплексную схему замещения цепи (отобразить исходную схему в комплексную область), составить систему линейных алгебраических уравнений относительно комплексных токов, рассчитать их и затем перейти во временную область по формуле обратного комплексного преобразования

$$\dot{U} = U \angle \varphi \longrightarrow \sqrt{2} U \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

Алгебраические операции над комплексными числами.

При решении системы уравнений потребуется выполнять алгебраические операции над комплексными числами. Вспомним соответствующий раздел высшей математики.

Сложение (вычитание) комплексов осуществляется в алгебраической форме записи чисел.

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= u_{1C} + ju_{1S} \\ \dot{U}_2 &= u_{2C} + ju_{2S} \\ \dot{U}_1 \pm \dot{U}_2 &= (u_{1C} + u_{2C}) \pm j(u_{1S} + u_{2S})\end{aligned}$$

Умножение (деление) комплексов проще осуществляется в показательной или полярной форме записи чисел.

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= u_{1C} + ju_{1S} = U_1 e^{j\alpha} = U_1 \angle \alpha \\ \dot{U}_2 &= u_{2C} + ju_{2S} = U_2 e^{j\beta} = U_2 \angle \beta \\ \dot{U}_1 \times \dot{U}_2 &= U_1 \times U_2 e^{j(\alpha+\beta)} = U_1 \times U_2 \angle (\alpha + \beta) \\ \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} &= \frac{U_1}{U_2} e^{j(\alpha-\beta)} = \frac{U_1}{U_2} \angle (\alpha - \beta) \\ \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} &= \frac{u_{1C} + ju_{1S}}{u_{2C} + ju_{2S}} = \frac{(u_{1C} + ju_{1S})(u_{2C} - ju_{2S})}{(u_{2C} + ju_{2S})(u_{2C} - ju_{2S})} = \\ &= \frac{(u_{1C}u_{2C} + u_{1S}u_{2S}) + j(u_{1C}u_{2S} + u_{1S}u_{2C})}{u_{2C}^2 + u_{2S}^2} = \frac{\dot{U}_1 U_2^*}{U_2^2}\end{aligned}$$

U_2^* – комплексно-сопряженное число

$$U_2^* = u_{2C} - ju_{2S} = U_2 e^{j(-\beta)}$$

Переход от показательной формы записи к алгебраической

$$Ue^{j\alpha} = u_C + ju_S, \quad \text{где}$$

$$u_C = U \cos(\alpha), \quad u_S = U \sin(\alpha)$$

Переход от алгебраической формы записи к показательной

$$u_C + ju_S = Ue^{j\alpha}, \quad \text{где}$$

$$U = \sqrt{u_C^2 + u_S^2}, \quad \alpha = \begin{cases} \operatorname{Arctg}\left(\frac{u_S}{u_C}\right), & \text{при } u_C > 0 \text{ и } u_S > 0 \\ -\operatorname{Arctg}\left(\frac{u_S}{u_C}\right), & \text{при } u_C > 0 \text{ и } u_S < 0 \\ \pi - \operatorname{Arctg}\left(\frac{u_S}{u_C}\right), & \text{при } u_C < 0 \text{ и } u_S > 0 \\ \pi + \operatorname{Arctg}\left(\frac{u_S}{u_C}\right), & \text{при } u_C < 0 \text{ и } u_S < 0 \end{cases}$$

Пример 3.1.

$$1e^{j90^\circ} = 1e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$10 + j10 = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ}$$

$$-10 + j10 = 10\sqrt{2}e^{j135^\circ}$$

Пример 3.2.

Дано:

$$R_1 = R_2 = x_C = 10 \text{ Ом}$$

$$x_L = 1 \text{ Ом}$$

$$\dot{I}_0 = 1 \angle 45^\circ, \text{ а}$$

$$\dot{E} = 100 \angle 0^\circ, \text{ в}$$

Найти \dot{I}_3 - ?

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 + \dot{I}_0 = 0, \\ R_1 \dot{I}_1 + (-jx_C) \dot{I}_1 + R_2 \dot{I}_2 = \dot{E}, \\ -R_2 \dot{I}_2 + jx_L \dot{I}_3 = 0; \end{cases}$$

Решение:

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = -1 \angle 45^\circ,$$

$$(10 - j10) \dot{I}_1 + 10 \dot{I}_2 = 100,$$

$$-10 \dot{I}_2 + j10 \dot{I}_3 = 0;$$

Выразим из третьего уравнения ток \dot{I}_2 и подставим его в первое уравнение. Сложим второе с третьим уравнением, выразим из полученной суммы ток \dot{I}_1 и его подставим в первое уравнение. Вычислим ток \dot{I}_3 .

$$\dot{I}_2 = j \dot{I}_3;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{100 - 10 \dot{I}_2}{10 - j10} = \frac{100 e^{j0^\circ} - 10 j \dot{I}_3}{10 \sqrt{2} e^{-j45^\circ}} =$$

$$= 5 \sqrt{2} e^{j(0^\circ - (-45^\circ))} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j(90^\circ - (-45^\circ))} \dot{I}_3 =$$

$$= 5 \sqrt{2} e^{j45^\circ} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j135^\circ} \dot{I}_3;$$

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = -1 \angle 45^\circ$$

$$5 \sqrt{2} e^{j45^\circ} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j135^\circ} \dot{I}_3 - j \dot{I}_3 - \dot{I}_3 = -1 \angle 45^\circ$$

$$5(1 + j) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} j\right) \dot{I}_3 - j \dot{I}_3 - \dot{I}_3 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

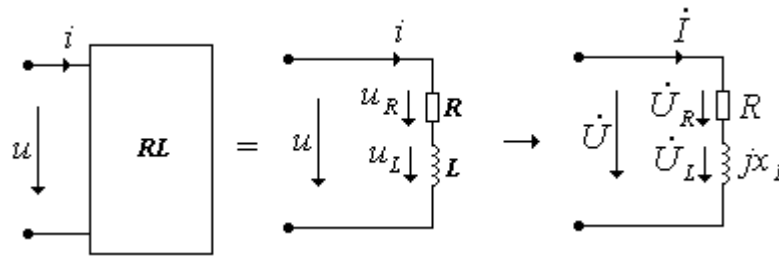
$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} j\right) \dot{I}_3 = -5 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 5\right) j$$

$$\dot{I}_3 = \frac{-5 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 5\right) j}{\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} j\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{5} + 4 - j\left(\frac{\sqrt{2}}{5} + 2\right).$$

Анализ синусоидального режима пассивного двухполюсника комплексным методом.

Расчет цепей можно выполнить с помощью решения уравнений Кирхгофа, а можно с помощью геометрических построений над векторами электрических величин на комплексной плоскости. Такие построения возможны с использованием эквивалентного преобразования векторов типа параллельный перенос, при котором ни фазовые, ни амплитудные соотношения векторов не меняются.

Последовательное соединение элементов RL.



по второму закону Кирхгофа

$$\dot{U} = \underset{\substack{\text{активная составляющая} \\ \text{напряжения}}}{\dot{U}_R} + \underset{\substack{\text{реактивная составляющая} \\ \text{напряжения}}}{\dot{U}_L}$$

по закону Ома

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L =$$

$$R\dot{I} + jx_L\dot{I} = (R + jx_L)\dot{I} = \underline{Z}_{RL}\dot{I}$$

$$\underline{Z}_{RL} = Z_{RL}e^{j\varphi} = \sqrt{R^2 + x_L^2}e^{j\text{Arctg}\left(\frac{x_L}{R}\right)}$$

Построим векторную диаграмму напряжений. Пусть вектор тока по направлению совпадает с действительной осью комплексной плоскости $\dot{I} = Ie^{j0^\circ}$, тогда положение векторов напряжений будет определяться следующим образом рис. 3.2. Вектор напряжения на резисторе $R\dot{I}$ совпадает с направлением вектора тока. Вектор напряжения на индуктивности $jx_L\dot{I} = e^{j90^\circ}x_L\dot{I}$ опережает вектор тока на 90° . Положение вектора входного напряжения определяется по правилу сложения векторов (рис. 3.3).

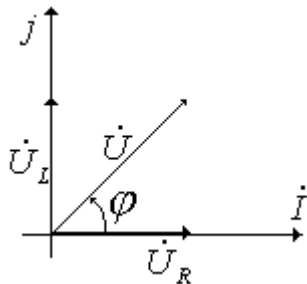


Рис. 3.2.

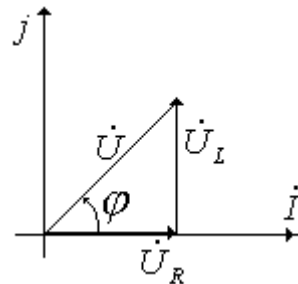


Рис. 3.3. Треугольник напряжений, получен путём параллельного переноса вектора \dot{U}_L .

Разделим стороны треугольника напряжений на величину модуля вектора тока и получим, так называемый, треугольник сопротивлений рис. 3.4.

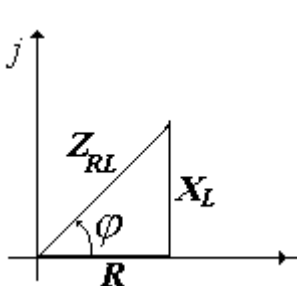


Рис. 3.4. Треугольник сопротивлений.

$z_{RL} = \sqrt{R^2 + x_L^2}$ - полное сопротивление, т.е.

модуль комплексного сопротивления

\underline{Z} двухполюсника ;

$R = z\cos(\varphi)$ - активная составляющая

комплексного сопротивления;

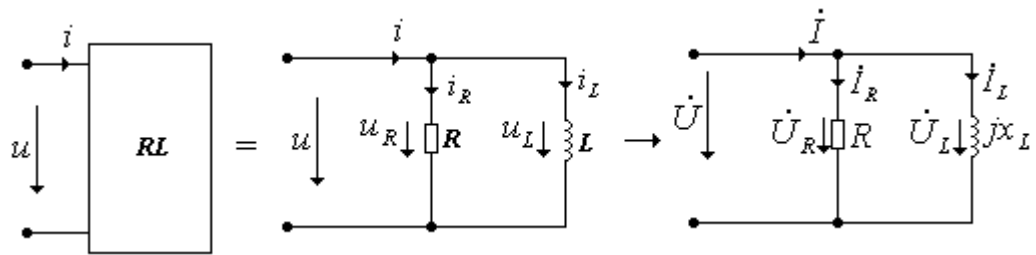
$x_L = z\sin(\varphi)$ - реактивная составляющая

комплексного сопротивления;

φ - угол двухполюсника. Для индуктивных, т.е.

RL двухполюсников эта величина больше нуля.

Параллельное соединение элементов RL .



по

первому закону Кирхгофа

$$\dot{I} = \underbrace{\dot{I}_R}_{\text{активная составляющая тока}} + \underbrace{\dot{I}_L}_{\text{реактивная составляющая тока}}$$

по закону Ома

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{jx_L} = \\ &= \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jx_L}\right)\dot{U} = \left(\frac{1}{R} - j\frac{1}{x_L}\right)\dot{U} = \\ &= (G - jB)\dot{U} = \\ &= \underline{Y}_{RL} \dot{U} \end{aligned}$$

$$\underline{Y}_{RL} = Y_{RL} e^{j\varphi} = \sqrt{G^2 + B_L^2} \cdot e^{-j\text{Arctg}\left(\frac{B_L}{G}\right)}$$

\underline{Y}_{RL} - комплексная проводимость;

$G = \frac{1}{R}$ - активная составляющая проводимости;

$B_L = \frac{1}{x_L}$ - реактивная составляющая проводимости;

Построим векторную диаграмму токов. Пусть направление вектора напряжения \dot{U} будет совпадать с направлением действительной оси комплексной плоскости, тогда положение векторов токов будет определяться следующим образом рис. 3.5. Вектор тока в резисторе $\dot{I}_R = G\dot{U}$ совпадает с направлением вектора напряжения. Вектор тока в индуктивности $\dot{I}_L = -jB_L\dot{U} = e^{-j90^\circ} B_L\dot{U}$ отстает от вектора напряжения на 90° . Положение вектора входного тока определяется по правилу сложения векторов. Если стороны треугольника токов разделить на модуль вектора напряжения, то получим треугольник проводимостей рис. 3.6.

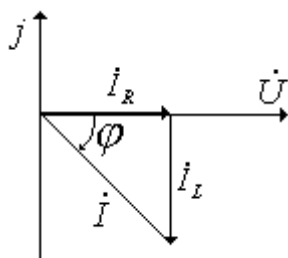


Рис. 3.5. Треугольник токов

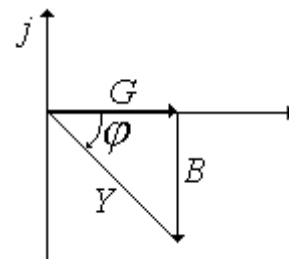


Рис. 3.6. Треугольник проводимостей

Эквивалентные схемы замещения пассивного двухполюсника.

Пусть имеется некоторый двухполюсник, схема и величины элементов которого неизвестны рис. 3.7. Режим этого двухполюсника наблюдается на экране осциллографа, т.е. известны амплитуда напряжения $u(t)$, амплитуда тока $i(t)$ и фазовый сдвиг φ .

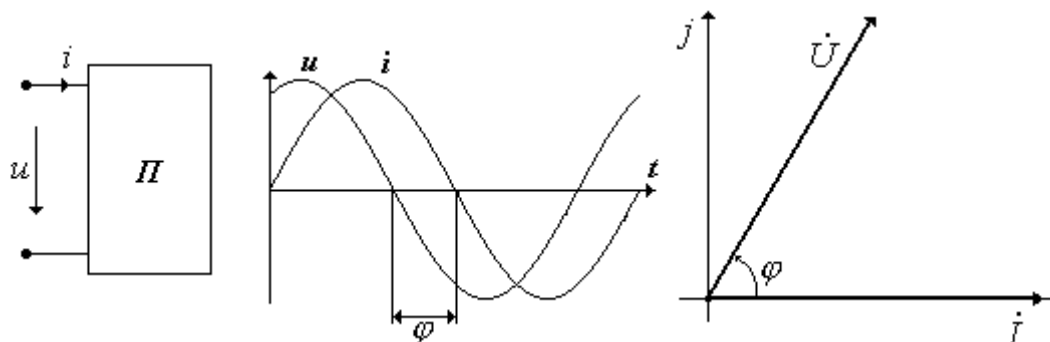


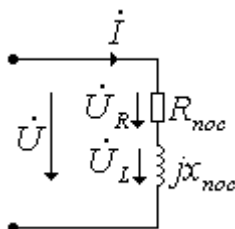
Рис. 3.7.

Задача. Для известного синусоидального режима двухполюсника ($\dot{U}, \dot{I}, \varphi$) найти схему замещения (т.е. способ соединения элементов) и их параметры. Такая задача называется идентификацией содержимого “черного ящика”.

Решение:

Поскольку напряжение опережает ток на угол φ , то значит, данный двухполюсник имеет индуктивный характер, т.е. составлен из элементов R, L . По имеющейся информации можно построить две схемные модели этого двухполюсника. Первая модель предполагает последовательное соединение R и L , а вторая – параллельное соединение.

1. Определяем параметры последовательной схемы замещения двухполюсника.



находим полное сопротивление

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi}}{Ie^{j0}} = \frac{U}{I}e^{j\varphi} = ze^{j\varphi}$$

$$z = \frac{U}{I}$$

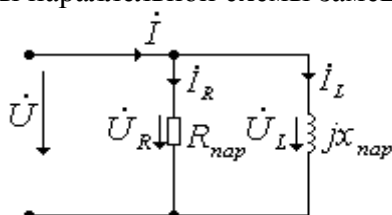
находим активную составляющую сопротивления

$$R_{noc} = z \cdot \cos(\varphi)$$

находим реактивную составляющую сопротивления

$$x_{noc} = z \cdot \sin(\varphi)$$

2. Определяем параметры параллельной схемы замещения двухполюсника.



находим полную проводимость

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I}{Ue^{j\varphi}} = Ye^{-j\varphi}$$

$$Y = \frac{I}{U}$$

находим активную составляющую проводимости

$$G = Y \cdot \cos(\varphi)$$

$$R_{\text{нар}} = \frac{1}{G}$$

находим реактивную составляющую проводимости

$$B = Y \cdot \sin(\varphi)$$

$$x_{\text{нар}} = \frac{1}{B}$$

Обе эти схемные модели эквивалентны, соответствуют наблюдаемому режиму и могут быть использованы для исследования данного двухполюсника. При имеющихся данных нет возможности выбрать последовательную или параллельную схему двухполюсника, как более адекватную. Какая схема будет точнее соответствовать реальному двухполюснику в других условиях нам неизвестно.

Установим взаимную связь между параметрами этих двух моделей, т.е. для заданных параметров параллельной схемы замещения вычислим параметры последовательной схемы

$$R_{\text{нос}} = f(R_{\text{нар}}, x_{\text{нар}}), \quad x_{\text{нос}} = f(R_{\text{нар}}, x_{\text{нар}})$$

и наоборот, для заданных параметров последовательной схемы замещения вычислим параметры параллельной схемы

$$R_{\text{нар}} = f(R_{\text{нос}}, x_{\text{нос}}), \quad x_{\text{нар}} = f(R_{\text{нос}}, x_{\text{нос}}).$$

Пусть дано $R_{\text{нар}}$ и $x_{\text{нар}}$, найти $R_{\text{нос}}$ и $x_{\text{нос}}$. Так как схемы эквивалентны, то их сопротивления равны друг другу.

$$\underline{Z}_{\text{нос}} = \underline{Z}_{\text{нар}}$$

$$\underline{Z}_{\text{нар}} = 1 / \underline{Y}_{\text{нар}} = \frac{1}{G - jB}$$

$$\underline{Z}_{\text{нос}} = \frac{1}{G - jB} =$$

$$= \frac{G + jB}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2} + j \frac{B}{Y^2}$$

$$R_{\text{нос}} = \frac{G}{Y^2} = \frac{1/R_{\text{нар}}}{(1/R_{\text{нар}})^2 + (1/x_{\text{нар}})^2} = \frac{R_{\text{нар}} x_{\text{нар}}^2}{R_{\text{нар}}^2 + x_{\text{нар}}^2}$$

$$x_{\text{нос}} = \frac{B}{Y^2} = \frac{1/x_{\text{нар}}}{(1/R_{\text{нар}})^2 + (1/x_{\text{нар}})^2} = \frac{R_{\text{нар}}^2 x_{\text{нар}}}{R_{\text{нар}}^2 + x_{\text{нар}}^2}$$

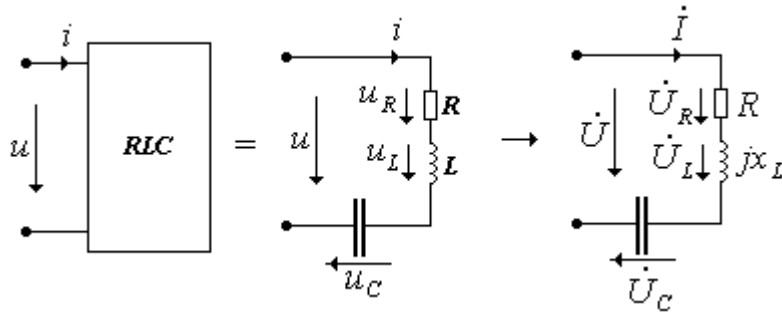
Пусть дано $R_{\text{нос}}$ и $x_{\text{нос}}$, найти $R_{\text{нар}}$ и $x_{\text{нар}}$. Так как схемы эквивалентны, то их проводимости равны друг другу.

$$\underline{Y}_{\text{нар}} = \underline{Y}_{\text{нос}}$$

$$\underline{Y}_{\text{нос}} = 1 / \underline{Z}_{\text{нос}} = \frac{1}{R_{\text{нос}} + jx_{\text{нос}}}$$

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{нар} &= \frac{1}{R_{noc} + jx_{noc}} = \\
&= \frac{R_{noc} - jx_{noc}}{R_{noc}^2 + x_{noc}^2} = \frac{R_{noc}}{R_{noc}^2 + x_{noc}^2} - j \frac{x_{noc}}{R_{noc}^2 + x_{noc}^2} \\
G - jB &= \frac{R_{noc}}{R_{noc}^2 + x_{noc}^2} - j \frac{x_{noc}}{R_{noc}^2 + x_{noc}^2} \\
\frac{1}{R_{нар}} - j \frac{1}{x_{нар}} &= \frac{R_{noc}}{R_{noc}^2 + x_{noc}^2} - j \frac{x_{noc}}{R_{noc}^2 + x_{noc}^2} \\
R_{нар} &= \frac{R_{noc}^2 + x_{noc}^2}{R_{noc}} \\
x_{нар} &= \frac{R_{noc}^2 + x_{noc}^2}{x_{noc}}
\end{aligned}$$

Последовательное соединение элементов RLC.



по второму закону Кирхгофа

$$\dot{U} = \underbrace{\dot{U}_R}_{\text{активная составляющая напряжения}} + \underbrace{\dot{U}_L + \dot{U}_C}_{\text{реактивная составляющая напряжения}}$$

по закону Ома

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C =$$

$$R\dot{I} + jx_L\dot{I} - jx_C\dot{I} = (R + j(x_L - x_C))\dot{I} =$$

$$\left(\underbrace{R}_{\text{активная составляющая сопротивления}} + \underbrace{jX}_{\text{реактивная составляющая сопротивления}} \right) \dot{I} = \underline{Z}_{RLC} \dot{I}$$

$$\underline{Z}_{RLC} = Z_{RLC} e^{j\varphi} = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} e^{j \text{Arctg} \left(\frac{x_L - x_C}{R} \right)}$$

Построим векторную диаграмму напряжений. Пусть вектор тока по направлению совпадает с действительной осью комплексной плоскости $\dot{I} = Ie^{j0}$, тогда положение векторов напряжений будет определяться следующим образом рис. 3.8. В зависимости от соотношения величин сопротивлений конденсатора и катушки комплексное сопротивление двухполюсника \underline{Z}_{RLC} может иметь либо ёмкостной, либо индуктивный характер.

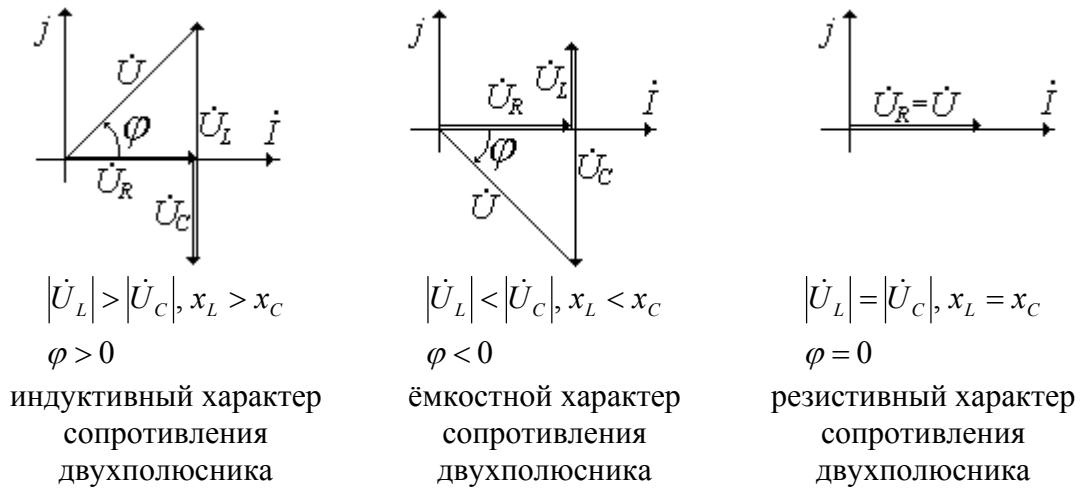
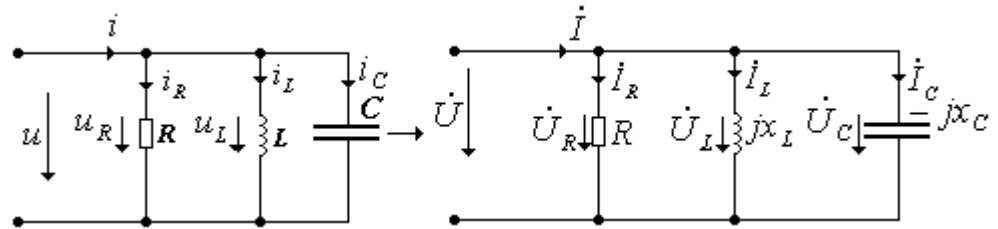


Рис. 3.8

Параллельное соединение элементов RLC.



по первому закону Кирхгофа

$$\dot{I} = \underbrace{\dot{I}_R}_{\text{активная составляющая тока}} + \underbrace{\dot{I}_L + \dot{I}_C}_{\text{реактивная составляющая тока}}$$

по закону Ома

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{jx_L} + \frac{\dot{U}}{-jx_C} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jx_L} + \frac{1}{-jx_C} \right) \dot{U} =$$

$$\left(\underbrace{\frac{1}{R}}_{\text{активная составляющая проводимости}} - \underbrace{j\left(\frac{1}{x_L} - \frac{1}{x_C}\right)}_{\text{реактивная составляющая проводимости}} \right) \dot{U} = (G - jB) \dot{U} = \underline{Y}_{RLC} \dot{U}$$

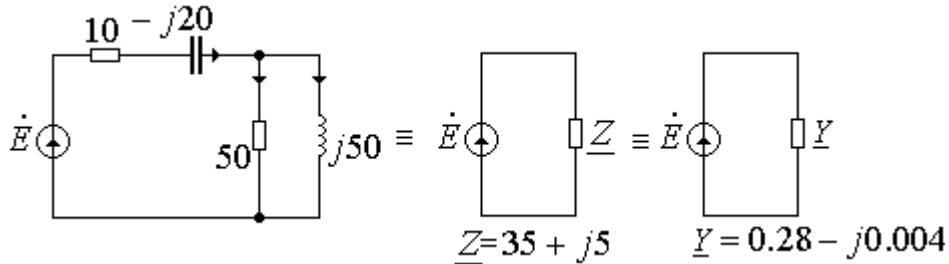
$$\underline{Y}_{RLC} = Y_{RLC} e^{j\varphi} = \sqrt{G^2 + B^2} \cdot e^{-j \text{Arctg}\left(\frac{B}{G}\right)}$$

Построим векторную диаграмму токов. Пусть вектор напряжения по направлению совпадает с действительной осью комплексной плоскости рис. 3.9.



Рис. 3.9.

Вывод. Любой участок цепи, не содержащий источников (пассивный двухполюсник), можно моделировать последовательной или параллельной схемой соединения активного R и реактивного сопротивлений X .



ЛЕКЦИЯ 4

МОЩНОСТЬ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА.

Протекание тока в цепи сопровождается преобразованием электрической энергии в тепловую энергию или энергию света. Такое безвозвратное преобразование происходит в резистивном элементе R . Реактивные же элементы L и C способны накапливать энергию магнитного и электрического полей соответственно.

$w_R = Ri^2 \Delta t$ - закон Джоуля - Ленца (1842 г.) определяет количество теплоты w_R , выделяемой в проводнике при прохождении через него электрического тока.

$w_L = \frac{Li^2}{2}$ - энергия магнитного поля, созданного током индуктивного элемента.

$w_C = \frac{Cu^2}{2}$ - энергия электрического поля, созданного электрическими зарядами.

Поддержание процессов преобразования и накопления энергии возможно при совершении работы силами неэлектрического происхождения.

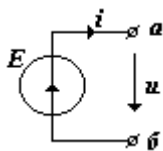
$$dA = udq -$$

элементарная работа по переносу элементарного заряда в электрическом поле [Дж].

$$p = \frac{dA}{dt} = u \frac{dq}{dt} = ui -$$

мгновенная мощность [Вт].

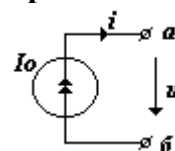
Мощность источников энергии



$$p_{ген} = ui = E \cdot i$$

источник ЭДС генерирует мощность $p_{ген} > 0$, если $i > 0$,

источник ЭДС потребляет мощность $p_{ген} < 0$, если $i < 0$.

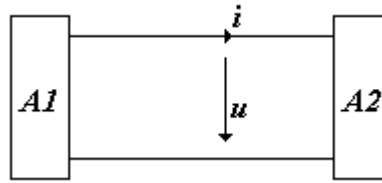


$$p_{ген} = ui = u \cdot I_o$$

источник тока генерирует мощность $p_{ген} > 0$, если $u > 0$ ($\varphi_a > \varphi_b$),

источник тока потребляет мощность $p_{ген} < 0$, если $u < 0$ ($\varphi_a < \varphi_b$).

Если разветвлённую цепь постоянного тока произвольно разбить на две части, то в общем случае получим последовательное соединение двух активных двухполюсников $A1$ и $A2$.

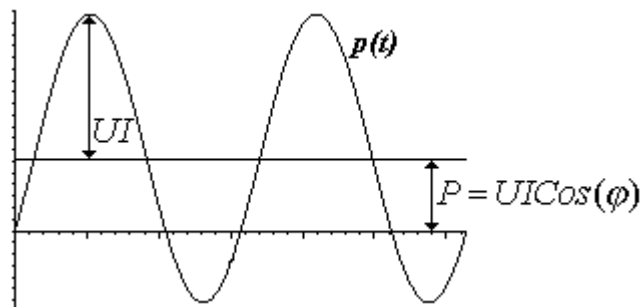


Пусть в результате расчета токов в этой цепи направление тока i совпало с выбранным направлением отсчёта положительной величины, т.е. $i > 0$, тогда можно говорить о направлении передачи мощности от $A1$ к $A2$ ($A1$ - источник, а $A2$ - приёмник мощности). Если же ток получится отрицательным, то направление передачи мощности будет от $A2$ к $A1$.

Рассмотрим синусоидальный режим двухполюсника, которому соответствуют напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ и ток $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$.

Мгновенная мощность двухполюсника

$$\begin{aligned}
 p &= ui = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi_u) \sin(\omega t + \varphi_i) = \\
 &2UI \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \sin(\omega t + \varphi_i) = \\
 &2UI \cdot (\sin^2(\omega t) \cos(\varphi_u) \cos(\varphi_i) + \\
 &\quad \sin(\omega t) \cos(\varphi_u) \cos(\omega t) \sin(\varphi_i) + \\
 &\quad \cos(\omega t) \sin(\varphi_u) \sin(\omega t) \cos(\varphi_i) + \\
 &\quad \cos^2(\omega t) \sin(\varphi_u) \sin(\varphi_i)) = \\
 &= UI \cdot ((1 - \cos(2\omega t) \cos(\varphi_u) \cos(\varphi_i) + \\
 &\quad \sin(2\omega t) \cos(\varphi_u) \sin(\varphi_i) + \\
 &\quad \sin(2\omega t) \sin(\varphi_u) \cos(\varphi_i) + \\
 &\quad (1 + \cos(2\omega t) \sin(\varphi_u) \sin(\varphi_i))) = \\
 &= UI \cdot (\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \\
 &\quad + (-\cos(2\omega t) \cos(\varphi_u) + \sin(2\omega t) \sin(\varphi_u)) \cos(\varphi_i) + \\
 &\quad (\cos(2\omega t) \sin(\varphi_u) + \sin(2\omega t) \cos(\varphi_u)) \sin(\varphi_i)) = \\
 &= UI \cdot (\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_u) \cos(\varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u) \sin(\varphi_i)) = \\
 &= UI \cdot (\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)), \text{ где } \varphi = \varphi_u - \varphi_i
 \end{aligned}$$



Мгновенная мощность синусоидального режима двухполюсника есть гармоническая функция, колеблющаяся с двойной частотой, смещённая на постоянную составляющую. На интервалах времени, когда $p > 0$, энергия поступает от источника в приёмник. На

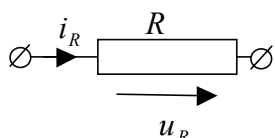
интервалах времени, когда $p < 0$, накопленная в реактивных элементах энергия частично возвращается в источник. Энергетика цепи переменного тока состоит из преобразовательного и обменного процессов. Уровень преобразовательного процесса характеризует величина активной мощности P . Энергия, связанная с активной мощностью необратимо теряется источниками цепи и превращается в другие виды энергии (тепловую, механическую, световую и др.)

Активная мощность двухполюсника

Среднее за период значение мгновенной мощности - активная мощность.

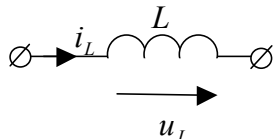
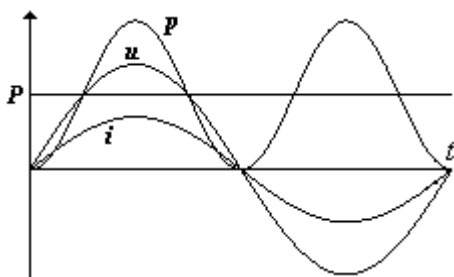
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \cdot (\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)) dt = UI \cdot \cos(\varphi), \text{ [Вт] - Ватт}$$

Активная мощность элементов RLC

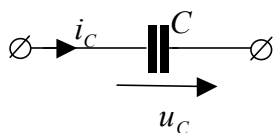
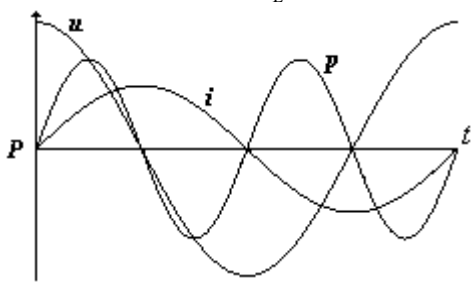


$$\begin{aligned} i_R &= I_m \sin(\omega t + \varphi_i), \\ u_R &= R \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_i), \\ \varphi &= \varphi_u - \varphi_i = 0, \end{aligned}$$

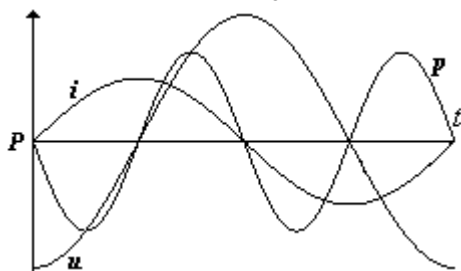
$$P_R = UI \cdot \cos(0) = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$



$$\begin{aligned} i_L &= I_m \sin(\omega t + \varphi_i), \\ u_L &= X_L I_m \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}), \\ X_L &= \omega L, \\ \varphi &= \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}, \\ P_L &= UI \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} u_C &= U_m \sin(\omega t + \varphi_u), \\ i_C &= \frac{1}{X_C} U_m \sin(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}), \\ X_C &= \frac{1}{\omega C}, \\ \varphi &= \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}, \\ P_C &= UI \cdot \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0. \end{aligned}$$

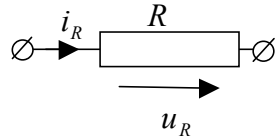


Полная мощность в цепи синусоидального тока.

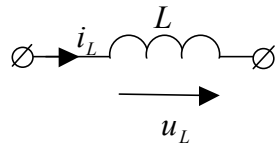
Габариты, масса и, в конечном счёте, цена устройства зависят от величины тока и напряжения, для которых проектируется устройство. От величины тока зависит диаметр проводников, а от величины напряжения площадь поперечного сечения стальных магнитопроводов. Вводим величину, равную произведению действующих значений тока и напряжения, которая называется **полная мощность S** . Иногда для неё можно встретить другое название – габаритная мощность.

$$S = UI, [\text{ВА}] - \text{вольт} - \text{ампер.}$$

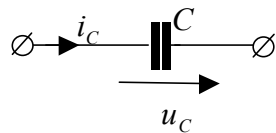
Полные мощности элементов RLC



$$S_R = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$



$$S_L = UI = X_L I^2 = \frac{U^2}{X_L}.$$



$$S_C = UI = X_C I^2 = \frac{U^2}{X_C}.$$

Реактивная мощность в цепи синусоидального тока.

Также искусственно, как и для полной мощности, вводим понятие **реактивной мощности Q** . Эта величина характеризует интенсивность обменного процесса в цепи переменного тока.

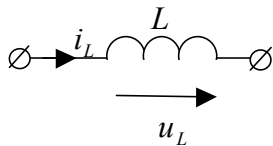
$$Q = I^2 \cdot X = U^2 B$$

$$X = Z \cdot \text{Sin}(\varphi), B = Y \cdot \text{Sin}(\varphi), \text{ где}$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$Q = I^2 \cdot Z \cdot \text{Sin}(\varphi) = U^2 Y \cdot \text{Sin}(\varphi) = UI \cdot \text{Sin}(\varphi) = S \cdot \text{Sin}(\varphi) [\text{ВАр}] - \text{вольт-ампер реактивный}$$

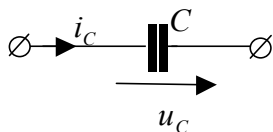
В зависимости от характера двухполюсника (индуктивный, ёмкостной) имеет место различный знак реактивной мощности.



$$Q_L = UI \cdot \text{Sin}(90^\circ) = UI = X_L I^2 = \frac{U^2}{X_L}.$$

$\varphi > 0$ напряжение опережает ток на 90° .

Индуктивность потребляет реактивную мощность.



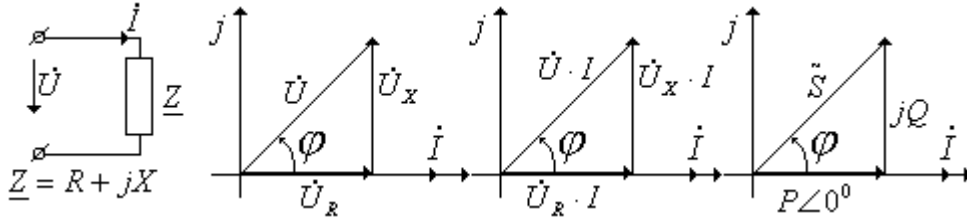
$$Q_C = UI \cdot \text{Sin}(-90^\circ) = -UI = -X_C I^2 = -\frac{U^2}{X_C}.$$

$\varphi < 0$ напряжение отстает от тока на 90° .

Ёмкость генерирует реактивную мощность.

Комплексная мощность.

Уменьшим масштаб по осям комплексной плоскости в I раз и превратим, тем самым, треугольник напряжений двухполюсника в треугольник мощностей.



\tilde{S} – комплексная мощность, [ВА] – вольт-ампер. Знак \sim (тильда) указывает на особый статус этой комплексной величины, т.е. операция обратного комплексного преобразования над ней с целью получить мгновенную мощность двухполюсника будет некорректной.

$$\tilde{S} = S \angle \varphi = UI \angle \varphi = P + jQ = UI \cdot \cos(\varphi) + jUI \cdot \sin(\varphi) = U_R I + jU_X I = RI^2 + jXI^2$$

$$\tilde{S} = UI \angle \varphi = U \angle \varphi_u I \angle (-\varphi_i) = UI \angle (\varphi_u - \varphi_i) = \dot{U} I^*$$

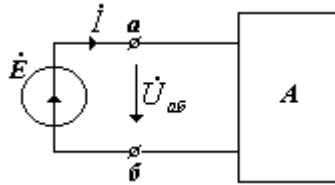
I^* – комплексно-сопряженный ток, $I^* = I \angle (-\varphi_i)$.

$$\tilde{S} = \dot{U} I^* = \underline{Z} I^* \cdot I = \underline{Z} I^2$$

или

$$\tilde{S} = \dot{U} I^* = \dot{U} \cdot \underline{Y} U = \underline{Y} U^2$$

Комплексная мощность источников



$\tilde{S}_{ген} = \dot{E} I^* = \dot{U}_{ab} I^* = P + jQ$ – мощность, генерируемая источником эдс. Если активная мощность $P > 0$, источник эдс генерирует (теряет) энергию, а двухполюсник A потребляет энергию. Иначе, если $P < 0$, то источник эдс потребляет энергию, а двухполюсник A теряет энергию.

Баланс мощности.

В электрических цепях соблюдается закон сохранения энергии. Это выражается в балансе мощности. Для цепи имеет место равенство комплексных мощностей источников и приёмников.

$$\sum \tilde{S}_{ист} = \sum \tilde{S}_{пр},$$

следовательно

$$\sum P_{ист} = \sum P_{пр} \text{ и}$$

$$\sum Q_{ист} = \sum Q_{пр}.$$

Измерение активной мощности.

Измерить активную мощность можно с помощью ваттметра. Ваттметр (W) – электрический прибор для измерения активной мощности в цепях постоянного или переменного тока. Работа ваттметра основана на взаимодействии двух обмоток — токовой и

напряжения, включаемых последовательно с нагрузкой и параллельно ей. Один из концов обмоток ваттметра помечен звёздочкой – это генераторный зажим. Чтобы измерить мощность в заданном направлении (от источника к приёмнику), необходимо генераторные зажимы обеих обмоток ориентировать в сторону источника мощности.

$$P_W = P = \operatorname{Re}\{\dot{U} I\} = UI \cdot \cos(\varphi)$$

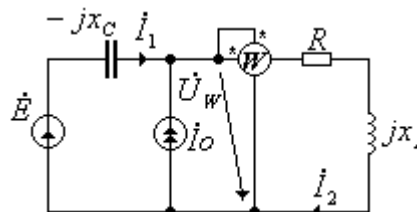
Дано:

$$R = x_L = x_C = 10 \text{ Ом}$$

$$\dot{E} = 100 \text{ В}, \dot{I}_o = 10j, \text{ А}$$

Найти:

1. Показание ваттметра.
2. Проверить выполнение баланса мощности.



Решение:

1. По законам Кирхгофа составим систему уравнений относительно токов и вычислим их.

$$\begin{cases} -10j\dot{I}_1 + (10 + j10)\dot{I}_2 = 100, \\ \dot{I}_1 + \dot{I}_o - \dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{I}_1 = 20 - 10j, \text{ А}$$

$$\dot{I}_2 = 20$$

2. Показание ваттметра

$$P_W = \operatorname{Re}\{U_W \dot{I}_W^*\}$$

$$\dot{I}_W = \dot{I}_2 = 20 = 20 + 0j, \text{ А}$$

$$\dot{U}_W = (R + jx_L)\dot{I}_2 = (10 + j10)20 = 200 + 200j, \text{ В}$$

$$P_W = \operatorname{Re}\{U_W \dot{I}_W^*\} = \operatorname{Re}\{(200 + 200j)(20 - 0j)\} = 4000 \text{ Вт}$$

3. Баланс мощности.

$$\sum \tilde{S}_{\text{ист}} = \dot{E} \dot{I}_1^* + \dot{U}_W \dot{I}_o^*$$

$$\dot{U}_W = (R + jx_L)\dot{I}_2 = (10 + j10)20 = 200 + 200j, \text{ В}$$

$$\begin{aligned} \sum \tilde{S}_{\text{ист}} &= \dot{E} \dot{I}_1^* + \dot{U}_W \dot{I}_o^* = 100(20 + 10j) + (200 + 200j)(0 - 10j) = \\ &= 2000 + 1000j - 2000j + 2000 = 4000 - 1000j, \text{ ВА} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \tilde{S}_{\text{пр}} &= -jx_C I_1^2 + (R + jx_L) I_2^2 = -10(20^2 + 10^2) + 10 \cdot 20^2 + 10j \cdot 20^2 = \\ &= -5000j + 4000 + 4000j = 4000 - 1000j, \text{ ВА}. \end{aligned}$$

Баланс мощности выполняется

$$\begin{aligned} \sum \tilde{S}_{\text{ист}} &= \sum \tilde{S}_{\text{пр}}. \\ 4000 - 1000j &= 4000 - 1000j. \end{aligned}$$

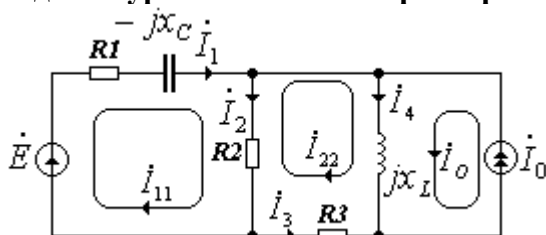
ЛЕКЦИЯ 5.

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.

Какова задача анализа цепи? Задача анализа – нахождение токов в ветвях схемы. Законы Кирхгофа дают систему независимых уравнений относительно токов в ветвях схемы.

Число этих уравнений, тем самым, равно числу ветвей схемы. Такое число уравнений для их совместного решения относительно велико, поэтому уравнения по законам Кирхгофа для анализа сложных цепей на практике не используются. С целью снижения числа совместно решаемых уравнений были разработаны методы анализа цепей. Основными среди них являются метод контурных токов (МКТ) и метод узловых потенциалов (МУП). Понижение числа уравнений, решаемых совместно, в этих методах достигается путём введения промежуточных переменных. В МКТ промежуточными переменными являются контурные токи, а уравнения для независимых контуров составляются по второму закону Кирхгофа. В МУП промежуточными переменными являются потенциалы узлов, а уравнения составляются для узлов по первому закону Кирхгофа. На заключительном этапе методов вычисляются токи в ветвях по промежуточным переменным, найденным из решения системы уравнений.

Метод контурных токов. Алгоритм расчета.



1. Задаёмся направлением отсчета положительной величины токов в ветвях.
2. Выбираем независимые контуры и задаёмся в них направлением контурных токов $\dot{I}_{11}, \dot{I}_{22}$.
3. Ток источника тока \dot{I}_0 замыкаем по любому замкнутому пути.
4. Для каждого контура составляем уравнение, в котором согласно второму закону Кирхгофа алгебраическая сумма падений напряжений на элементах контура равна нулю. Знак величины падения напряжения на элементе определяется по отношению к направлению контурного тока.

$$\text{Первый контур: } R_1 \dot{I}_{11} + (-jx_C) \dot{I}_{11} + R_2 \dot{I}_{11} - R_2 \dot{I}_{22} = \dot{E},$$

$$\text{Второй контур: } -R_2 \dot{I}_{11} + R_2 \dot{I}_{22} + R_3 \dot{I}_{22} + jx_L \dot{I}_{22} + jx_L \dot{I}_0 = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_1 - jx_C + R_2) \dot{I}_{11} - R_2 \dot{I}_{22} = \dot{E}, \\ -R_2 \dot{I}_{11} + (R_2 + R_3 + jx_L) \dot{I}_{22} = -jx_L \dot{I}_0. \end{array} \right.$$

5. Решаем полученную систему уравнений относительно контурных токов.
6. Вычисляем реальные токи в ветвях схемы как комбинацию контурных токов

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11},$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22},$$

$$\dot{I}_3 = -\dot{I}_{22},$$

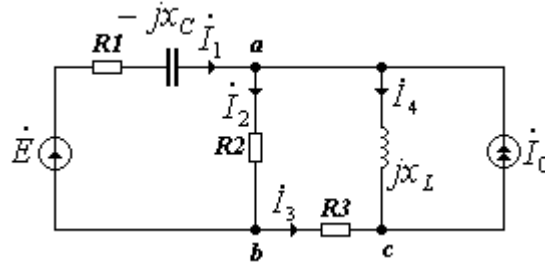
$$\dot{I}_4 = \dot{I}_{22} + \dot{I}_0.$$

В общем случае структура контурного уравнения будет такой

$$\underline{Z}_{kk} \dot{I}_{kk} + \sum \pm \underline{Z}_{kl} \dot{I}_{kl} = \sum \pm \dot{E}_k + \sum \pm \underline{Z}_{k0} \dot{I}_{0j}$$

падение напряжения на собственном сопротивлении контура от контурного тока
 Сумма падений напряжения на элементах контура от токов смежных контуров. Слагаемое в сумме берётся с плюсом, если \dot{I}_{kk} и \dot{I}_{kl} имеют одно направление
 Сумма эдс в контуре. Эдс берётся с плюсом, если её направление совпадает с направлением контурного тока
 Сумма падений напряжения на элементах контура от токов источников тока. Слагаемое в сумме берётся с плюсом, если направление тока источника тока не совпадает с направлением контурного тока.

Метод узловых потенциалов. Алгоритм расчета.



1. Задаёмся направлением отсчета положительной величины токов в ветвях.
2. Узлы схемы обозначаем, например, буквами **a**, **b**, **c**.
3. Выбираем один из узлов в качестве базового и принимаем его потенциал равным θ . Пусть базовым узлом будет узел **b**.
4. Для остальных узлов составляем уравнения, в которых по первому закону Кирхгофа сумма токов входящих в узел равна нулю

$$\text{Узел } a: \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_4 + \dot{I}_0 = 0$$

$$\frac{(\dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_a) + \dot{E}}{R_1 - jx_c} - \frac{(\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b)}{R_2} - \frac{(\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_c)}{jx_L} + \dot{I}_0 = 0$$

$$\dot{\varphi}_a \left(\frac{1}{R_1 - jx_c} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jx_L} \right) - \dot{\varphi}_c \frac{1}{jx_L} = \dot{E} \frac{1}{R_1 - jx_c} + \dot{I}_0$$

$$\text{Узел } c: \dot{I}_3 + \dot{I}_4 - \dot{I}_0 = 0$$

$$\frac{(\dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_c)}{R_3} + \frac{(\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_c)}{jx_L} - \dot{I}_0 = 0$$

$$-\dot{\varphi}_a \frac{1}{jx_L} + \dot{\varphi}_c \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{jx_L} \right) = -\dot{I}_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}_a \left(\frac{1}{R_1 - jx_c} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jx_L} \right) - \dot{\varphi}_c \frac{1}{jx_L} = \dot{E} \frac{1}{R_1 - jx_c} + \dot{I}_0 \\ -\dot{\varphi}_a \frac{1}{jx_L} + \dot{\varphi}_c \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{jx_L} \right) = -\dot{I}_0 \end{array} \right.$$

5. Решаем полученную систему уравнений относительно потенциалов узлов.
6. Вычисляем токи в ветвях схемы по обобщённому закону Ома.

$$\dot{I}_1 = \frac{-\varphi_a + \dot{E}}{R_1 - jx_c}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\varphi_a}{R_2},$$

$$\dot{I}_3 = \frac{-\varphi_c}{R_3}, \quad \dot{I}_4 = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{jx_L}.$$

В общем случае структура узлового уравнения будет такой

$$\varphi_k \underline{Y}_{ks} - \sum \varphi_s \underline{Y}_{ks} = \sum \pm \dot{E}_{ks} \underline{Y}_{ks} + \sum \pm \dot{I}_{oj}$$

потенциал собственного узла, умноженный на сумму проводимостей ветвей, подключённых к нему.

Сумма потенциалов смежных узлов, умноженных на проводимость ветвей, соединяющих смежные узлы с собственным узлом.

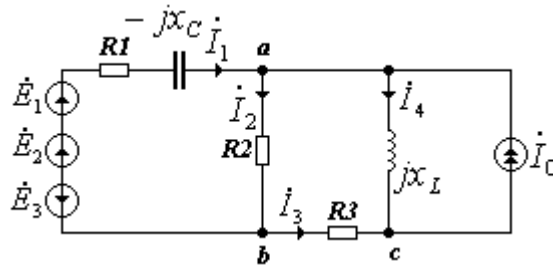
Сумма эдс, умноженных на проводимость ветвей, соединяющих смежные узлы с собственным узлом. Эдс берётся со знаком плюс, если она направлена к узлу.

Сумма токов источников тока, подключённых к узлу. Слагаемой в сумме берётся с плюсом, если ток входит в узел.

При выборе метода расчета токов нужно определить количество совместно решаемых уравнений. Если граф схемы имеет много контуров и мало узлов, выбор, очевидно, за МУП, иначе, если много узлов, но мало контуров, то выбор за МКТ.

Метод наложения.

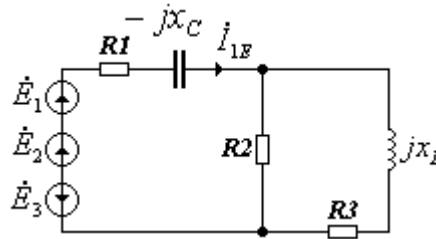
Этот метод основан на принципе суперпозиции, который справедлив для систем или полей, описываемых линейными уравнениями; важен в механике, теории колебаний и волн, теории физических полей. Согласно принципу суперпозиции результирующий эффект от нескольких независимых воздействий, представляет собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности.



Вычислим методом наложения ток \dot{I}_1 . В данном случае, искомый ток находится как алгебраическая сумма результатов независимого действия источников, т.е.

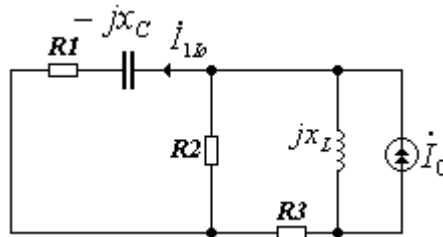
$$\dot{I}_1 = \underbrace{\dot{I}_{1E}}_{\text{результат действия трех источников эдс}} - \underbrace{\dot{I}_{1I_0}}_{\text{результат действия источника тока}}$$

1. Находим первое слагаемое, т.е. результат действия источников эдс. В расчетной схеме источник тока имеет нулевое действие (устранён), а так как его внутреннее сопротивление равно ∞ Ом, то его можно не показывать на этой схеме.



$$\dot{I}_{1E} = \frac{\dot{E}_1 + \dot{E}_2 - \dot{E}_3}{\underline{Z}} - \text{по 3. Ома, где } \underline{Z} = R_1 - jx_c + \frac{R_2(R_3 + jx_L)}{R_2 + R_3 + jx_L}$$

2. Находим второе слагаемое, т.е. результат действия источника тока. В расчетной схеме источник эдс имеет нулевое действие, а так как его внутреннее сопротивление равно нулю, то он заменяется короткой.



$$\dot{I}_{1I_0} = \dot{I}_0 \times \frac{jx_L}{R_3 + \frac{R_2(R_1 - jx_c)}{R_2 + R_1 - jx_c} + jx_L} \times \frac{R_2}{R_2 + R_1 - jx_c} - \text{по правилу чужого}$$

сопротивления, применённому два раза. В результате получим

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 + \dot{E}_2 - \dot{E}_3}{R_1 - jx_c + \frac{R_2(R_3 + jx_L)}{R_2 + R_3 + jx_L}} - \dot{I}_0 \times \frac{jx_L}{R_3 + \frac{R_2(R_1 - jx_c)}{R_2 + R_1 - jx_c} + jx_L} \times \frac{R_2}{R_2 + R_1 - jx_c}, \text{ А.}$$

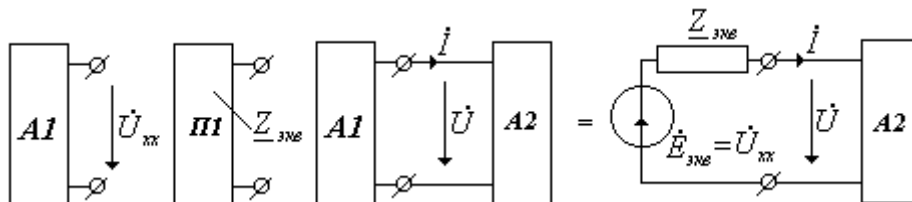
Метод эквивалентного генератора.

Существует теорема Тевенена об активном двухполюснике:

Активный двухполюсник $A1$, рассматриваемый относительно своих зажимов, эквивалентен генератору с двумя параметрами:

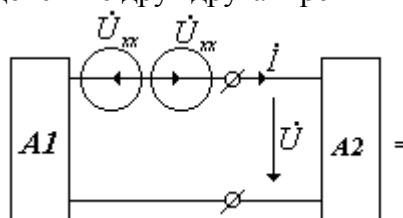
1. эдс $\dot{E}_{экв}$, равной напряжению холостого хода;

2. внутреннему сопротивлению $Z_{экв}$, равному входному сопротивлению пассивного двухполюсника $\Pi1$, полученного из исходного активного двухполюсника путём устранения его источников.

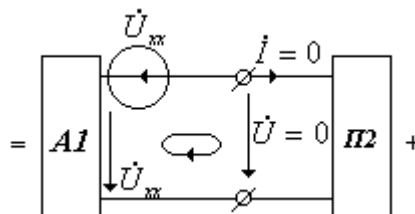


Доказательство

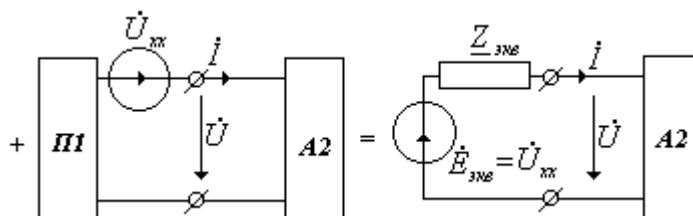
Если последовательно с активным двухполюсником включить встречно два источника эдс, то они будут компенсировать действие друг друга и режим цепи не изменится.



Режим цепи может быть определён методом наложения. Найдём результат действия источников двухполюсника $A1$ и эдс, равной \dot{U}_{xx} , направленной против тока \dot{I} .



$-\dot{U}_{xx} + \dot{U}_{xx} + \dot{U} = 0, \dot{U} = 0, \dot{I} = 0$. Следовательно эта составляющая может быть исключена из расчёта режима. Найдём результат действия источников двухполюсника $A2$ и эдс, равной \dot{U}_{xx} , направленной по току \dot{I} .

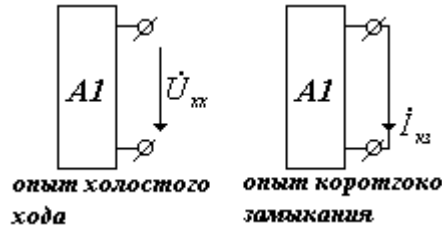


Итак, режим цепи не изменяется, если активный двухполюсник $A1$ будет заменён на эквивалентный генератор (ЭГ), состоящий из последовательного соединения эдс, равной напряжению холостого хода \dot{U}_{xx} и его внутреннего сопротивления $Z_{экв}$.

Метод эквивалентного генератора, как метод расчёта тока в одной ветви, уступает по эффективности и МКТ и МУП. При нахождении напряжения холостого хода ЭГ ветвь нагрузки устраняется. При этом порядок системы совместно решаемых уравнений снижается не значительно и, как правило, требуется применение МКТ или МУП для вычисления напряжения холостого хода или тока короткого замыкания. Заметным преимуществом метод

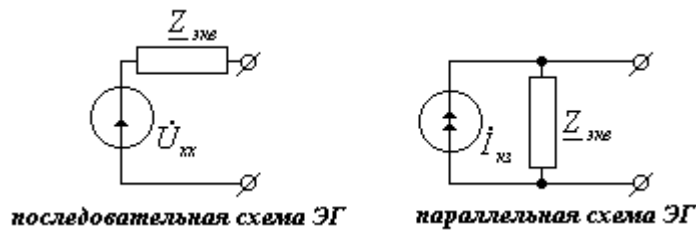
ЭГ обладает в задаче, когда требуется производить анализ режима цепи в одной части, в которой нет изменения параметров, а в другой параметры изменяются с целью достигнуть заданных свойств режима. В этом случае замена фиксированной части схемы эквивалентным генератором упрощает расчёты.

Экспериментальное определение параметров ЭГ.

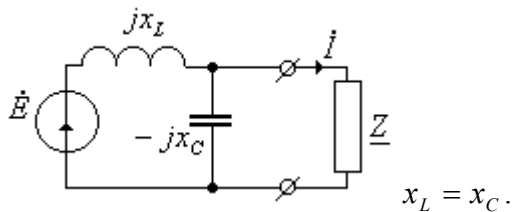


$$\underline{Z}_{\text{экв}} = \frac{\dot{U}_{xx}}{\dot{I}_{kz}}$$

Эквивалентные схемы ЭГ

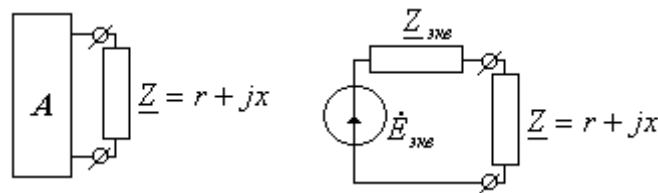


Задача. Рассчитайте ток на выходе схемы Бушера. Какова зависимость величины тока \dot{I} от сопротивления нагрузки \underline{Z} ?



Условие отбора максимальной активной мощности в нагрузку.

Какой должна быть нагрузка активного двухполюсника, чтобы она получила максимальную активную мощность?



$P = rI^2$ - потребляемая нагрузкой активная мощность.

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_{\text{экв}}}{\underline{Z}_{\text{экв}} + \underline{Z}} = \frac{\dot{E}_{\text{экв}}}{(r_{\text{экв}} + r) + j(x_{\text{экв}} + x)} = \frac{E_{\text{экв}} \angle \varphi_e}{\sqrt{(r_{\text{экв}} + r)^2 + (x_{\text{экв}} + x)^2} \angle \varphi} = I \angle (\varphi_e - \varphi)$$

$$P = \frac{rE_{\text{экв}}^2}{(r_{\text{экв}} + r)^2 + (x_{\text{экв}} + x)^2}$$

Первое условие – равенство модулей и противоположность характера реактивных составляющих комплексных сопротивлений нагрузки и эквивалентного генератора, т. е. $x_{\text{экв}} = -x$. При выполнении первого условия мощность будет зависеть только от активного

сопротивления нагрузки r , т. е. $P(r) = \frac{rE_{\text{экв}}^2}{(r_{\text{экв}} + r)^2}$. Найдем экстремум этой зависимости из условия

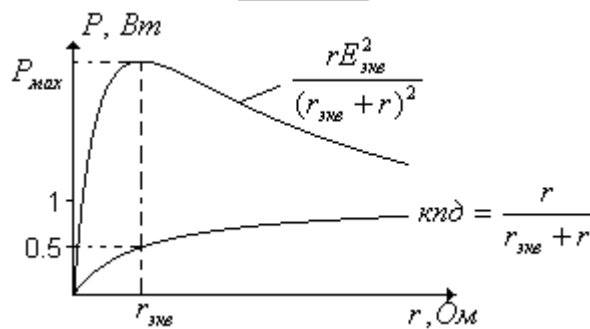
$$\frac{d}{dr} P(r) = 0$$

$$\frac{d}{dr} P(r) = \frac{d}{dr} \frac{rE_{\text{экв}}^2}{(r_{\text{экв}} + r)^2} = \frac{E_{\text{экв}}^2}{(r_{\text{экв}} + r)^2} - 2 \frac{rE_{\text{экв}}^2}{(r_{\text{экв}} + r)^3} = \frac{E_{\text{экв}}^2 (r_{\text{экв}} + r) - 2rE_{\text{экв}}^2}{(r_{\text{экв}} + r)^3} = \frac{E_{\text{экв}}^2 (r_{\text{экв}} - r)}{(r_{\text{экв}} + r)^3}$$

$$\frac{d}{dr} P(r) = 0, \text{ если } r = r_{\text{экв}}.$$

Второе условие – равенство активных частей сопротивлений ЭГ и его нагрузки $r = r_{\text{экв}}$. Первое и второе условия можно объединить в одно

$$\underline{Z} = \dot{Z}_{\text{эке}}$$



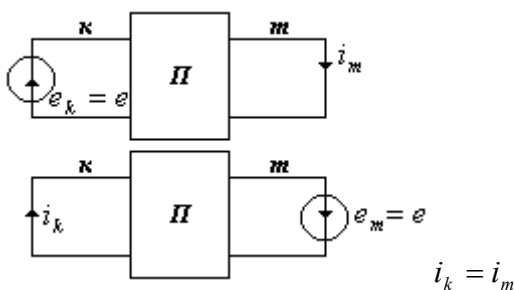
$$\text{кпд} = \frac{P_H}{P_{\text{ист}}} = \frac{I^2 r}{E_{\text{экв}} I} = \frac{I r}{E_{\text{экв}}} = \frac{r_{\text{экв}} + r}{E_{\text{экв}}} r = \frac{r}{r_{\text{экв}} + r}$$

$$P_{\text{max}} = \frac{E_{\text{экв}}^2}{4r_{\text{экв}}}$$

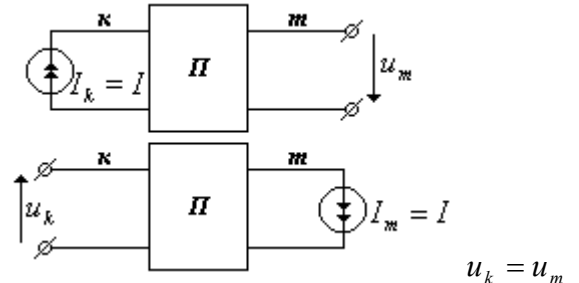
Принцип взаимности.

Этот принцип устанавливает связь:

- между токами в двух ветвях пассивной цепи, при действии в них источника ЭДС.
- между напряжениями в двух ветвях пассивной цепи, при действии в них источника тока.

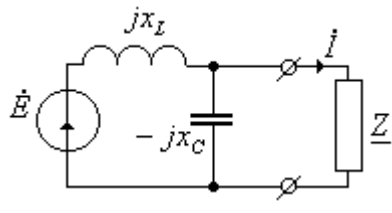


При переносе эдс из ветви κ в ветвь m , в которой протекал ток i_m , её действие приведёт к появлению в ветви κ тока i_k , равного току i_m в ветви m до переноса.



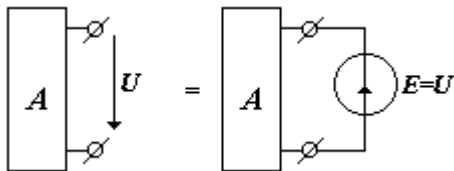
При переносе источника тока из ветви κ в ветвь m , в разрыве которой было напряжение u_m , его действие приведёт к появлению в разрыве ветви κ напряжения u_k , равного напряжению u_m в ветви m до переноса.

Задача. Рассчитайте ток на выходе схемы Бушера. Обратите внимание на изящность решения с использованием принципа взаимности.

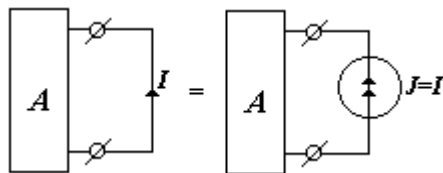


$x_L = x_C$. Решение: достаточно одного действия $\dot{I} = \frac{\dot{E}}{jx_L}$, A.

Принцип компенсации.



Если к двум точкам цепи, между которыми действует напряжение U , подключить источник эдс $E=U$, то режим цепи не изменится.

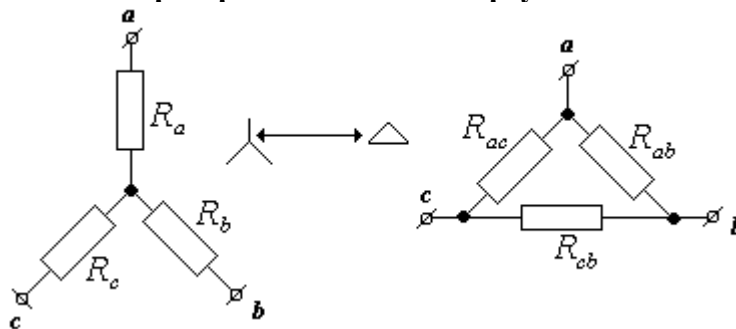


Если в ветвь с током I включить источник тока $J=I$, то режим цепи также не изменится.

Преобразование схем.

В результате преобразования получается схема эквивалентная исходной схеме, т.е. режим в результате преобразования не изменяется. Целью преобразования схемы является получение новой схемы, для которой анализ осуществляется наиболее просто. В основе преобразований лежит принцип эквивалентности линейных схем: *если две системы содержат n элементов, то для их эквивалентности необходимо равенство n произвольных режимов.*

Преобразование звезда-треугольник.



Если обе эти схемы эквивалентны, то имеет место равенство сопротивлений измеряемых по отношению к одноимённым зажимам.

$$\left. \begin{aligned} R_{ab\lambda} &= R_{ab\Delta} \\ R_{bc\lambda} &= R_{bc\Delta} \\ R_{ac\lambda} &= R_{ac\Delta} \end{aligned} \right\} \begin{cases} R_a + R_c = \frac{R_{ac}(R_{ab} + R_{cb})}{R_{ac} + R_{ab} + R_{cb}} \\ R_a + R_b = \frac{R_{ab}(R_{ac} + R_{cb})}{R_{ac} + R_{ab} + R_{cb}} \\ R_b + R_c = \frac{R_{cb}(R_{ab} + R_{ca})}{R_{ac} + R_{ab} + R_{cb}} \end{cases}$$

Из решения этой системы трёх уравнений можно выразить параметры одной схемы, через параметры другой и наоборот.

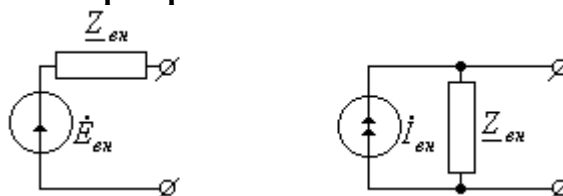
$$R_a = \frac{R_{ab}R_{ac}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_aR_b}{R_c}$$

$$R_b = \frac{R_{ab}R_{bc}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_bR_c}{R_a}$$

$$R_c = \frac{R_{bc}R_{ac}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad R_{ac} = R_a + R_c + \frac{R_aR_c}{R_b}$$

Пример. См. практическое занятие №1.

Преобразование источников.



Для эквивалентных последовательной и параллельной схем источников должно иметь место равенство двух режимов.

Последовательная схема источника	Параллельная схема источника
$\dot{U}_{xx} = \dot{E}_{ен}$ - режим холостого хода,	$\dot{U}_{xx} = \underline{Z}_{ен} \dot{I}_{ен}$ - режим холостого хода,
$\dot{I}_{кз} = \frac{\dot{E}_{ен}}{\underline{Z}_{ен}}$ - режим короткого замыкания,	$\dot{I}_{кз} = \dot{I}_{ен}$ - режим короткого замыкания,
$\dot{E}_{ен} = \underline{Z}_{ен} \dot{I}_{ен}$ - формула преобразования.	$\dot{I}_{ен} = \frac{\dot{E}_{ен}}{\underline{Z}_{ен}}$ - формула преобразования.

Пример.

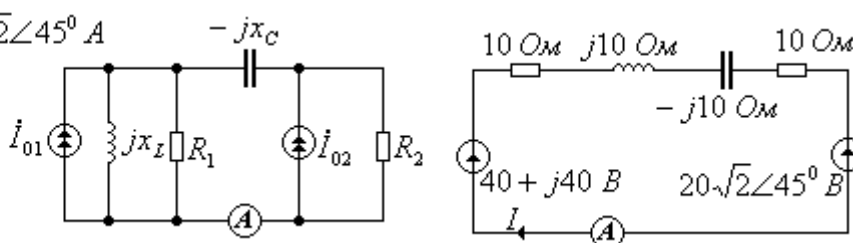
$$\dot{I}_{01} = 4A \quad \dot{I}_{02} = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ A$$

$$-jx_C = -j10 \text{ Ом}$$

$$jx_L = j20 \text{ Ом}$$

$$R_1 = 20 \text{ Ом}$$

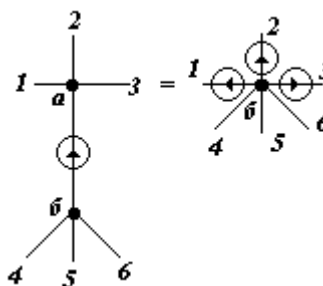
$$R_2 = 10 \text{ Ом}$$



$$I_A = I = \frac{40 + j40 - 20\sqrt{2}\angle 45^\circ}{10 + j10 - j10 + 10} = \frac{40 + j40 - (20 + j20)}{20} = 1 + j A.$$

Устранение узла у ветви с источником эдс.

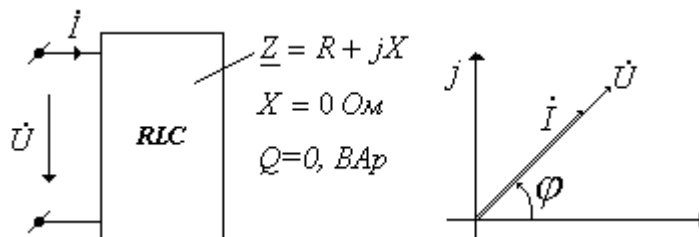
При составлении уравнения в МУП для узла, к которому подключается ветвь с источником эдс, возникает проблема деления на ноль. Для избежания этой проблемы составляют эквивалентную схему, в которой эдс переносится за узел.



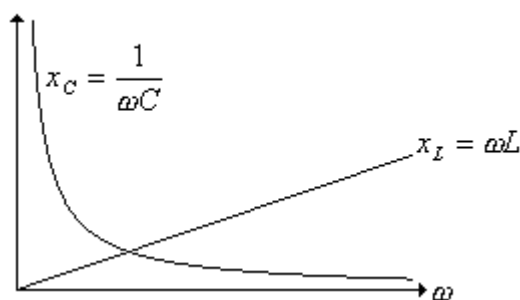
ЛЕКЦИЯ 6.

ЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСА В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ.

Резонанс – это режим участка цепи, при котором его сопротивление чисто активное. Ток и напряжение совпадают по фазе, обмен энергией с внешним источником отсутствует, вся потребляемая мощность чисто активная.

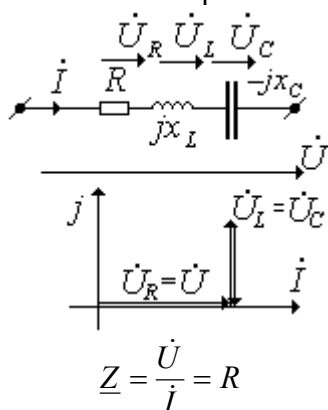


Причиной резонанса является различная зависимость величин сопротивлений реактивных элементов в цепи синусоидального тока от частоты. Достигнуть резонанса, если он желателен, или устранить его, если он вреден, можно путём изменения частоты ω или параметров элементов L, C .

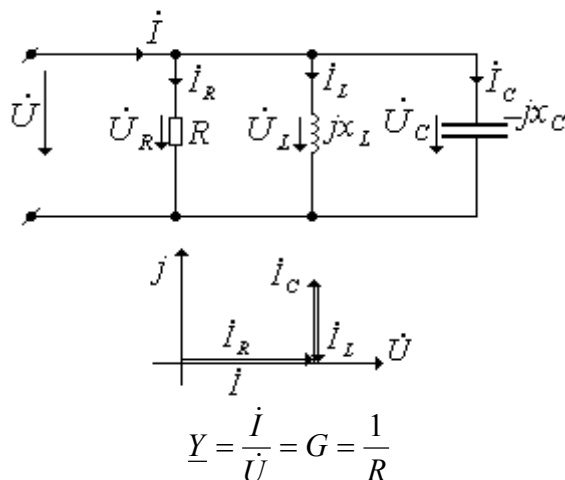


Различают два вида резонансов. В последовательной цепи имеет место резонанс напряжений, а в параллельной – резонанс токов.

Резонанс напряжений



Резонанс токов



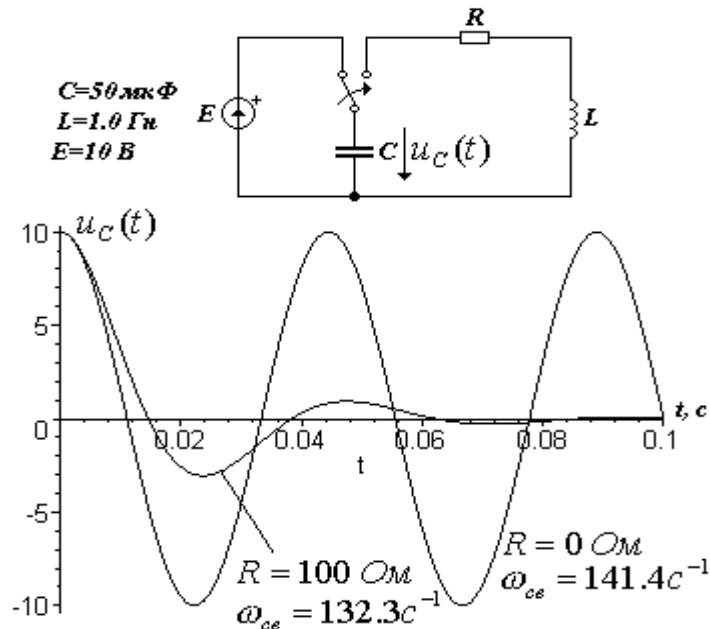
Из условия равенства реактивных сопротивлений получим значение резонансной частоты

$$x_L = x_C$$

$$\omega_{рез} L = \frac{1}{\omega_{рез} C}$$

$$\omega_{рез} = \sqrt{\frac{1}{LC}}, c^{-1}$$

Покажем связь собственной частоты колебаний с резонансной частотой вынужденных колебаний. Если заряженный конденсатор замкнуть на дроссель, то при достаточно малом активном сопротивлении R , будет иметь место колебательный вид процесса разряда. Колебания в цепи без источников называются свободными колебаниями. Частота этих колебаний называется собственной частотой ω_{ce} , т.е. определяется только параметрами цепи. При уменьшении потерь в колебательном контуре, т.е. $R \rightarrow 0$ частота свободных колебаний, стремится к резонансной частоте $\omega_{ce} \rightarrow \omega_p$.

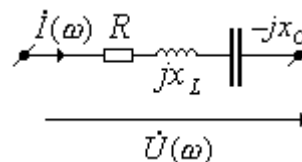


$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{1.0 \text{ Гн} \times 50 \text{ мкФ}}} = 141.42 \text{ с}^{-1}$$

$$\omega_{ce} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \quad \lim_{R \rightarrow 0} \omega_{ce} = \omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Частотные характеристики цепи.

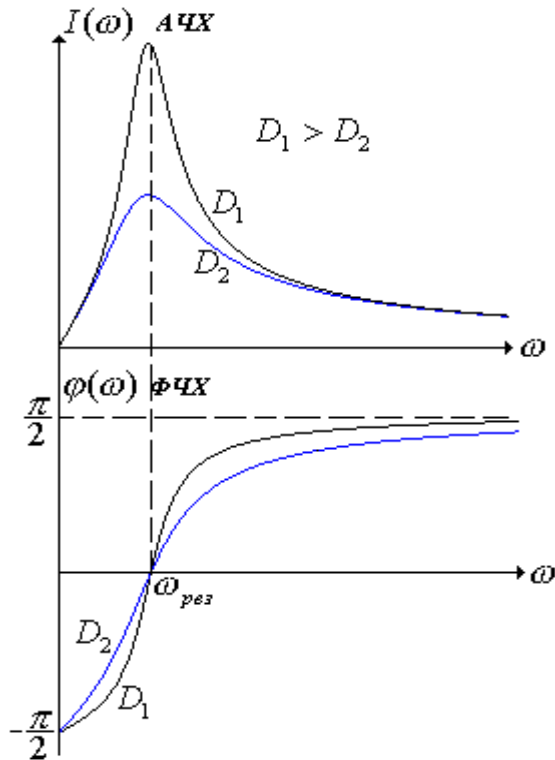
Частотные характеристики цепи показывают зависимость параметров цепи или действующих в них электрических величин от частоты. Частотная характеристика - это комплексная величина: её модуль называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), а аргумент - фазо-частотной характеристикой (ФЧХ).



$$\dot{U}(\omega) = U \angle \varphi_u, \quad \dot{I}(\omega) = I(\omega) \angle \varphi_i(\omega)$$

$$I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} - \text{АЧХ}$$

$$\varphi_i(\omega) = \text{Arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) - \text{ФЧХ}$$

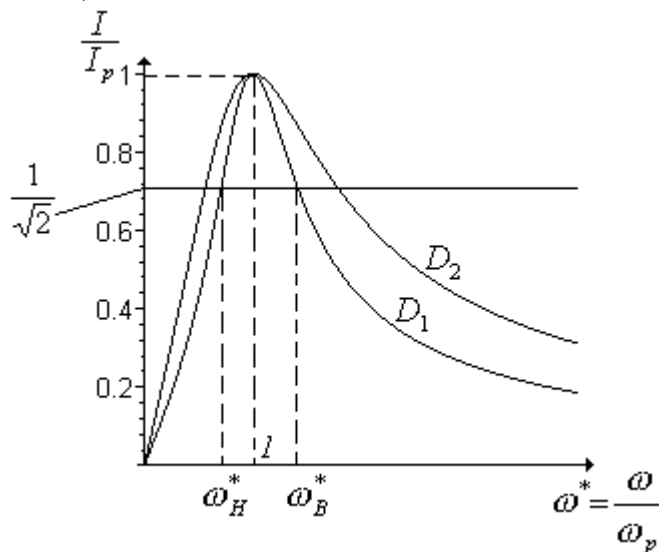


Резонансные или избирательные свойства цепи характеризуют **добротность D** и **полосу пропускания колебательного контура**. Добротность показывает, во сколько раз запасённая в колебательном контуре энергия больше чем потери энергии в нём за период. Практически достигают добротность 200-500.

$$D = \frac{Q_L}{P} = \frac{Q_C}{P} = \frac{I^2 x_L}{I^2 R} = \frac{I^2 x_C}{I^2 R} = \frac{\omega_{рез} L}{R} = \frac{1}{R \omega_{рез} C}$$

$$D = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Диапазон частот, в пределах которого зависимость амплитуды колебаний от их частоты достаточно слаба, чтобы обеспечить передачу сигнала без существенного искажения называется **полосой пропускания**. Иначе, в пределах полосы пропускания величина изменяется не более чем в $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ раз.



Покажем связь величины полосы пропускания с величиной добротности колебательного контура.

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{\frac{U}{R}}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{I_p}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_p L}{R})^2 (\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega})^2}}$$

$$I(\omega) = \frac{I_p}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_p L}{R})^2 (\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega})^2}} = \frac{I_p}{\sqrt{1 + D^2 (\omega^* - \frac{1}{\omega^*})^2}}$$

$$\sqrt{1 + D^2 (\omega^* - \frac{1}{\omega^*})^2} = \frac{I_p}{I(\omega)} = \sqrt{2}$$

$$1 + D^2 (\omega^* - \frac{1}{\omega^*})^2 = 2$$

$$D(\omega^* - \frac{1}{\omega^*}) = \pm 1 \quad D\omega^{*2} - D = \pm \omega^*$$

$$\omega^{*2} \mp \frac{1}{D}\omega^* - 1 = 0$$

$$\omega^{*2} - \frac{1}{D}\omega^* - 1 = 0$$

$$\omega^{*2} + \frac{1}{D}\omega^* - 1 = 0$$

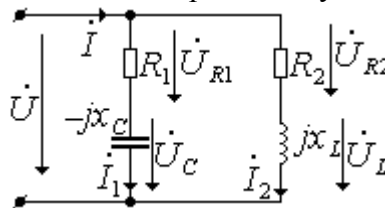
$$\omega^* = \frac{1}{2D} \pm \sqrt{\frac{1}{4D^2} + 1}$$

$$\omega^* = -\frac{1}{2D} \pm \sqrt{\frac{1}{4D^2} + 1}$$

Из двух корней выбираем $\omega_B^* = \frac{1}{2D} + \sqrt{\frac{1}{4D^2} + 1}$ Из двух корней выбираем $\omega_H^* = -\frac{1}{2D} + \sqrt{\frac{1}{4D^2} + 1}$

$$\boxed{\omega_B^* - \omega_H^* = \frac{1}{D}}$$

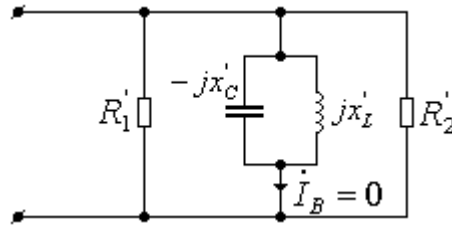
Пример. В параллельной RC – RL цепи определить условия резонанса токов.



Решение:

1. Вычисляем проводимость данного участка цепи

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{R_1 - jx_C} + \frac{1}{R_2 + jx_L} = \\ &= \frac{R_1 + jx_C}{R_1^2 + x_C^2} + \frac{R_2 - jx_L}{R_2^2 + x_L^2} = \\ &= \frac{R_1}{R_1^2 + x_C^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + x_L^2} - j\left(\frac{x_L}{R_2^2 + x_L^2} - \frac{x_C}{R_1^2 + x_C^2}\right) = \\ &= G_1' + G_2' - j(B_2' - B_1'). \end{aligned}$$



2. Условие резонанса токов - равенство нулю реактивной составляющей комплексной проводимости участка цепи, т.е. $B_2' - B_1' = 0$.

$$\frac{x_L}{R_2^2 + x_L^2} - \frac{x_C}{R_1^2 + x_C^2} = 0$$

$$\frac{\omega_p L}{R_2^2 + (\omega_p L)^2} - \frac{\omega_p C}{((C\omega_p R_1)^2 + 1)} = 0$$

$$\frac{\omega_p L}{R_2^2 + (\omega_p L)^2} = \frac{\omega_p C}{((C\omega_p R_1)^2 + 1)}$$

$$L((C\omega_p R_1)^2 + 1) = C(R_2^2 + (\omega_p L)^2)$$

$$L(C\omega_p R_1)^2 - C(\omega_p L)^2 = CR_2^2 - L$$

$$\omega_p^2 = \frac{CR_2^2 - L}{L(CR_1)^2 - CL^2}$$

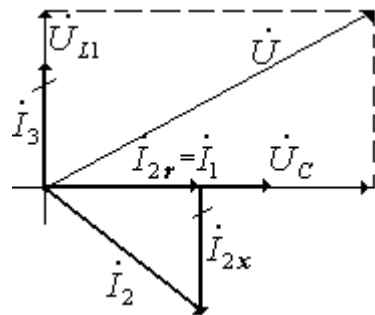
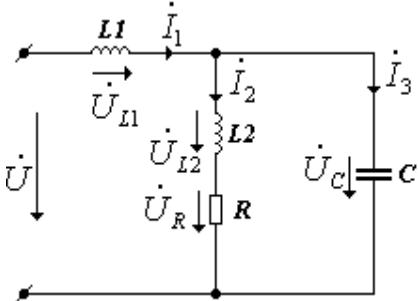
$$\omega_p = \pm \sqrt{\frac{CR_2^2 - L}{LC(CR_1^2 - L)}} = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_2^2 - \frac{L}{C}}{R_1^2 - \frac{L}{C}}}$$

Отсюда следует условие резонанса токов $\left\{ \begin{array}{l} R_2^2 - \frac{L}{C} > 0 \text{ и } R_1^2 - \frac{L}{C} > 0 \\ R_2^2 - \frac{L}{C} < 0 \text{ и } R_1^2 - \frac{L}{C} < 0 \end{array} \right\}$.

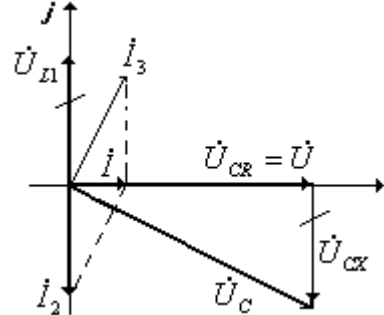
Резонанс в сложной цепи.

Если на участке цепи имеется параллельное и последовательное соединение реактивных элементов, то при определённых условиях возможен либо резонанс тока, либо резонанс напряжений.

Пример. Определим условия резонанса токов и напряжений.



Векторная диаграмма в режиме резонанса токов.



Векторная диаграмма в режиме резонанса напряжений.

Решение:

Определяем условие резонанса токов. Найдём проводимость параллельного участка цепи

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + jx_{L2}} + \frac{1}{-jx_C} = \frac{R - jx_{L2}}{R^2 + x_{L2}^2} + j\frac{1}{x_C} = G - jB$$

$$G = \frac{R}{R^2 + x_{L2}^2}, \quad B = \frac{x_{L2}}{R^2 + x_{L2}^2} - \frac{1}{x_C}.$$

Условие резонанса токов - равенство нулю реактивной составляющей комплексной проводимости участка цепи, т.е. $B = 0$.

$$B = \frac{x_{L2}}{R^2 + x_{L2}^2} - \frac{1}{x_C} = 0$$

$$x_{L2}x_C - (R^2 + x_{L2}^2) = 0$$

$$\frac{L_2}{C} - R^2 - L_2^2\omega_{pT}^2 = 0$$

$$\omega_{pT} = \sqrt{\frac{1}{CL_2} - \frac{R^2}{L_2^2}} = \sqrt{\frac{L_2 - CR^2}{CL_2^2}}$$

Определяем условие резонанса напряжений. Найдём сопротивление цепи

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= jx_{L1} + \frac{(R + jx_{L2})(-jx_C)}{R + j(x_{L2} - x_C)} = jx_{L1} + \frac{x_{L2}x_C - jx_C R}{R + j(x_{L2} - x_C)} = \\ &= jx_{L1} + \frac{(x_{L2}x_C - jx_C R) \times (R - j(x_{L2} - x_C))}{R^2 + (x_{L2} - x_C)^2} = \\ &= jx_{L1} + \frac{x_{L2}x_C R - (x_{L2} - x_C)x_C R - j(x_C R^2 + x_{L2}x_C(x_{L2} - x_C))}{R^2 + (x_{L2} - x_C)^2} = \\ &= R_{\vartheta} + jX_{\vartheta} \end{aligned}$$

$$R_{\vartheta} = \frac{x_{L2}x_C R - (x_{L2} - x_C)x_C R}{R^2 + (x_{L2} - x_C)^2}$$

$$X_{\vartheta} = x_{L1} - \frac{x_C R^2 + x_{L2}x_C(x_{L2} - x_C)}{R^2 + (x_{L2} - x_C)^2}$$

Условием резонанса напряжений является равенство нулю реактивной составляющей комплексного сопротивления, т.е. $X_{\vartheta} = 0$.

$$x_{L1} - \frac{x_C R^2 + x_{L2}x_C(x_{L2} - x_C)}{R^2 + (x_{L2} - x_C)^2} = 0$$

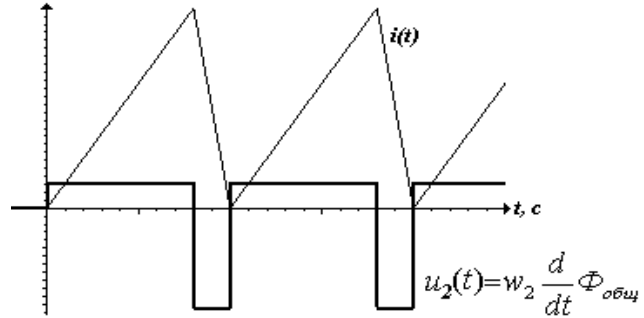
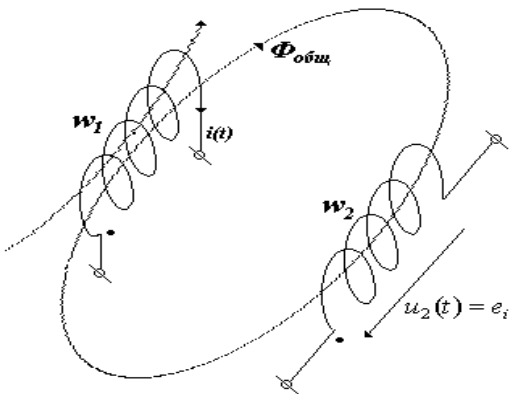
$$x_{L1}R^2 + x_{L1}(x_{L2} - x_C)^2 - x_C R^2 - x_{L2}x_C(x_{L2} - x_C) = 0$$

$$R^2 = \frac{x_{L2}x_C(x_{L2} - x_C) - x_{L1}(x_{L2} - x_C)^2}{x_{L1} - x_C}$$

ЛЕКЦИЯ 7.

ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

Индуктивный элемент при протекании в нём электрического тока создаёт магнитное поле, которое распространяется в окружающем пространстве. Направление магнитного потока определяется правилом буравчика с правой нарезкой. Некоторая часть магнитного потока может оказаться сцепленной с другим проводящим контуром, в котором согласно закону электромагнитной индукции (Фарадей, 29.08.1831) будет наводиться эдс взаимной индукции. Направление эдс взаимной индукции определяется правилом Ленца (1833 г.).



Этот пример иллюстрирует связь наводящего тока $i(t)$ и наведённого напряжения $u_2(t)$.

Способность проводника создавать (возбуждать) магнитное поле характеризуется вебер-амперной характеристикой $\psi_{11} = L_1 i_1$. В случае линейной среды намагничивания параметром этой характеристики является индуктивность. Вводим понятие взаимной индуктивности. Способность проводника создавать магнитное поле, которое проникает в другой контур, характеризуется взаимной индуктивностью. Взаимная индуктивность M – это коэффициент пропорциональности между величиной наводимого потокосцепления и наводящего тока

$$\psi_{21} = w_2 \Phi_{общ} = w_2 \Phi_{21} = M_{21} i_1.$$

Отметим, что согласно принципу взаимности, эта способность у обоих элементов одинаковая, т.е. $M = M_{12} = M_{21}$. Используя взаимную индуктивность можно определить наводимое напряжение так

$$u_2(t) = \frac{d}{dt} \psi_{21}(t) = M \frac{d}{dt} i_1(t).$$

Как сильно связаны индуктивные элементы, показывает коэффициент связи $k_{св}$. Он равен среднему геометрическому (среднему пропорциональному) от отношения наводящей части потока к всему потоку для обоих индуктивных элементов, т.е.

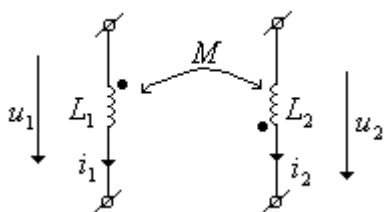
$$k_{св} = \sqrt{\frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} \times \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}}} = \sqrt{\frac{w_2 \Phi_{21}}{w_1 \Phi_{11}} \times \frac{w_1 \Phi_{12}}{w_2 \Phi_{22}}} = \sqrt{\frac{\psi_{21} \psi_{12}}{\psi_{11} \psi_{22}}} = \sqrt{\frac{M_{21} i_1 \times M_{12} i_2}{L_1 i_1 \times L_2 i_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \text{ где}$$

индекс, например, у величины Φ_{12} означает, что рассматривается часть магнитного потока второго контура, проникающая в первый контур. Отметим, что коэффициент связи всегда меньше единицы

$$k_{св} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1.$$

Рассмотрим два индуктивных элемента L_1 и L_2 , имеющих взаимную индуктивность M . Пусть токи этих элементов i_1 и i_2 известны, тогда определим напряжения u_1 и u_2 . Для

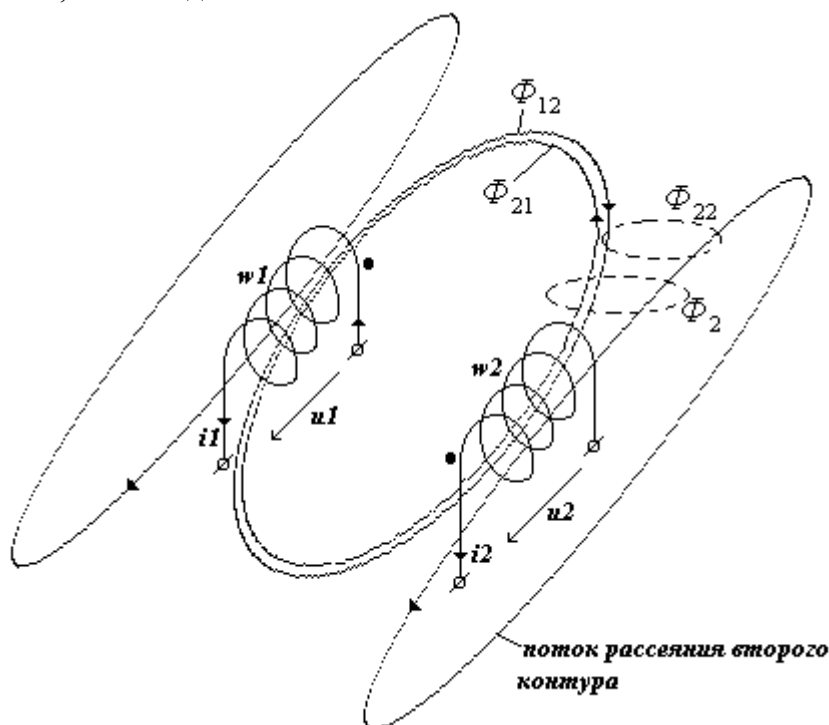
обозначения магнитной связи на схемах используют двойную стрелочку с указанием величины взаимной индуктивности.



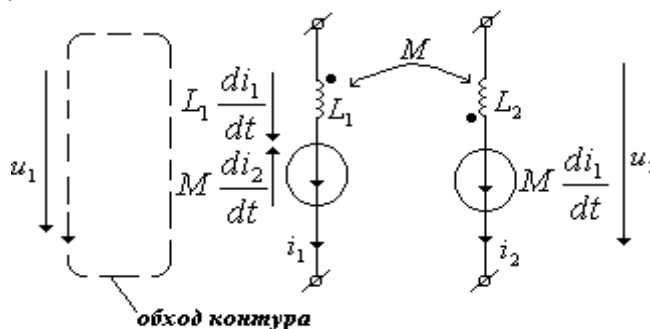
$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d\psi_{11}}{dt} - \frac{d\psi_{21}}{dt} = \underbrace{L_1 \frac{d}{dt} i_1}_{\text{напряжение самоиндукции}} - \underbrace{M \frac{d}{dt} i_2}_{\text{напряжение взаимной индукции}}$$

$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d\psi_{22}}{dt} - \frac{d\psi_{12}}{dt} = \underbrace{L_2 \frac{d}{dt} i_2}_{\text{напряжение самоиндукции}} - \underbrace{M \frac{d}{dt} i_1}_{\text{напряжение взаимной индукции}}$$

Напряжение на индуктивном элементе состоит из двух слагаемых. Первое – напряжение самоиндукции, а второе – напряжение взаимной индукции. Знак напряжения взаимной индукции определяется по правилу Ленца при наличии маркировки одноимённых зажимов. Начало или конец обмоток должны быть помечены точкой, звёздочкой и пр. В отношении одноимённых зажимов можно утверждать, что при одинаковом направлении собственного и наводящего токов, собственный и наводимый магнитные потоки тоже имеют одинаковое направление, т.е. складываются.



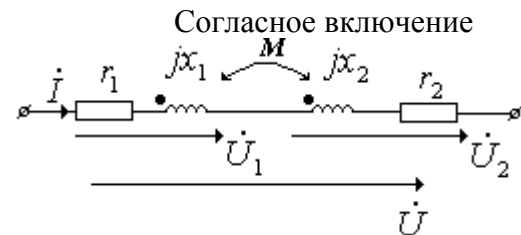
Изобразим в рассматриваемом примере индуцированную (наводимую) эдс в виде зависимого источника напряжения, направление которого согласно правилу Ленца таково, что ток, им вызываемый, должен быть направлен по отношению к одноимённому зажиму иначе, чем наводящий ток.



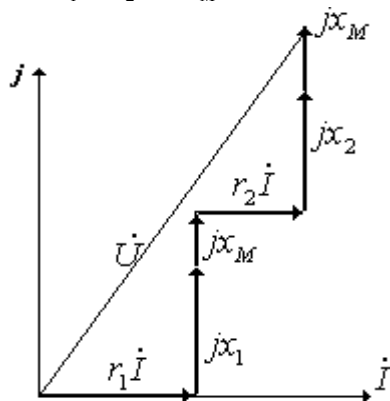
Сформулируем правило определения знака наводимого напряжения.

Если наводящий ток по отношению к одноимённому зажиму первого индуктивного элемента направлен иначе чем обход контура по отношению к одноимённому зажиму второго индуктивного элемента, то наводимое напряжение в уравнении по второму закону Кирхгофа берётся со знаком “минус”, иначе, если по отношению к одноимённым зажимам и наводящий ток, и обход контура направлены одинаково, то наводимое напряжение берётся со знаком “плюс”.

Рассмотрим последовательное соединение индуктивно связанных элементов, используя для этого комплексный метод. В зависимости от направления тока по отношению к одноимённым зажимам различают схемы согласного и встречного включения индуктивно связанных элементов.



$$\begin{aligned} \dot{U} &= (r_1 + jx_1)\dot{I} + jx_M\dot{I} + (r_2 + jx_2)\dot{I} + jx_M\dot{I} = \\ &= (r_1 + r_2 + j(x_1 + x_2 + 2x_M))\dot{I} \end{aligned}$$



Если ток в отношении одноимённых зажимов имеет одно направление, то такое последовательное соединение называется **согласным**.

Используя различие величин сопротивлений при встречном и согласном включении можно сделать маркировку концов обмоток, т.е. обозначить одноимённые зажимы. Исследуя обе катушки отдельно, а также при встречном и согласном их включении, можно определить величину взаимной индуктивности.

$$\begin{aligned} z_{\text{сог}}^2 - z_{\text{вст}}^2 &= (r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2 + 2x_M)^2 - ((r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2 - 2x_M)^2) = \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_M)^2 - (x_1 + x_2 - 2x_M)^2 = 8x_M(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

$$x_M = \frac{z_{\text{сог}}^2 - z_{\text{вст}}^2}{8(x_1 + x_2)}$$

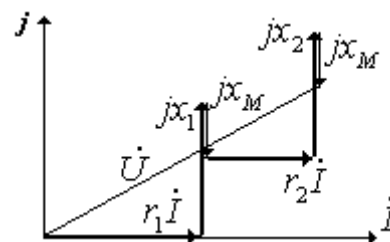
$$M = \frac{z_{\text{сог}}^2 - z_{\text{вст}}^2}{8\omega(x_1 + x_2)}$$

Расчёт цепей с взаимной индукцией.

Для расчёта цепей с взаимной индуктивностью применяют метод контурных токов или уравнения по законам Кирхгофа. Метод узловых потенциалов, уступает в эффективности, поскольку нельзя просто выразить наводимую эдс только через потенциалы



$$\begin{aligned} \dot{U} &= (r_1 + jx_1)\dot{I} - jx_M\dot{I} + (r_2 + jx_2)\dot{I} - jx_M\dot{I} = \\ &= (r_1 + r_2 + j(x_1 + x_2 - 2x_M))\dot{I} \end{aligned}$$



Если ток в отношении одноимённых зажимов имеет противоположное направление, то такое последовательное соединение называется **встречным**.

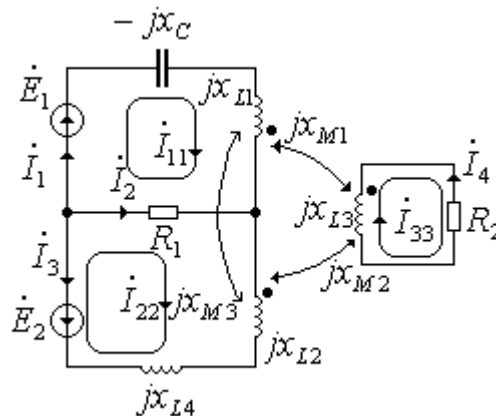
$$z_{\text{сог}} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2 + 2x_M)^2}$$

$$z_{\text{вст}} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2 - 2x_M)^2}$$

$$z_{\text{вст}} < z_{\text{сог}}$$

узлов. Применение метода эквивалентного генератора возможно при условии, что в качестве нагрузки выделяется ветвь не имеющая магнитных связей с элементами ЭГ. Метод эквивалентного преобразования заключается в осуществлении гальванической развязки, т.е. построение такой эквивалентной схемы, в которой индуктивная связь заменена на гальваническую. После выполнения этой процедуры можно уже применять и метод узловых потенциалов.

Пример. Составить систему уравнений для вычисления токов ветвей цепи с взаимной индуктивностью. Будем использовать для решения задачи метод контурных токов и законы Кирхгофа.



Метод контурных токов

$$\left\{ \begin{aligned} (-jx_C + jx_{L1} + R_1)\dot{I}_{11} - R_1\dot{I}_{22} + jx_{M1}\dot{I}_{33} - jx_{M3}\dot{I}_{22} &= \dot{E}_1 \\ -R_1\dot{I}_{11} + (jx_{L2} + jx_{L4} + R_1)\dot{I}_{22} - jx_{M2}\dot{I}_{33} - jx_{M3}\dot{I}_{11} &= -\dot{E}_2 \\ jx_{M1}\dot{I}_{11} - jx_{M2}\dot{I}_{22} + (R_2 + jx_{L3})\dot{I}_{33} &= 0 \end{aligned} \right.$$

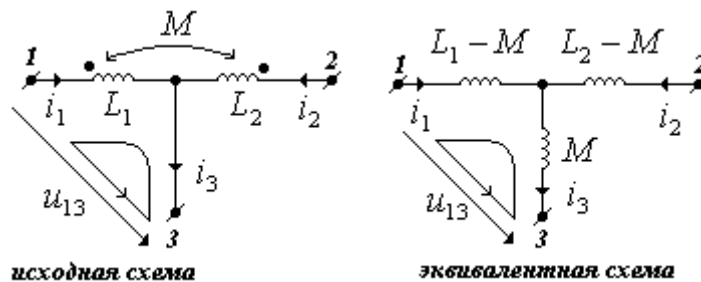
$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11}, \dot{I}_2 = \dot{I}_{22} - \dot{I}_{11}, \dot{I}_3 = -\dot{I}_{22}, \dot{I}_4 = -\dot{I}_{33}.$$

Уравнения по законам Кирхгофа

$$\left\{ \begin{aligned} (-jx_C + jx_{L1})\dot{I}_1 - R_1\dot{I}_2 - jx_{M1}\dot{I}_4 + jx_{M3}\dot{I}_3 &= \dot{E}_1 \\ (jx_{L2} + jx_{L4})\dot{I}_3 - R_1\dot{I}_1 + jx_{M2}\dot{I}_4 - jx_{M3}\dot{I}_1 &= -\dot{E}_2 \\ jx_{M1}\dot{I}_1 + jx_{M2}\dot{I}_3 + (R_2 + jx_{L3})\dot{I}_4 &= 0 \\ \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Развязка индуктивной связи.

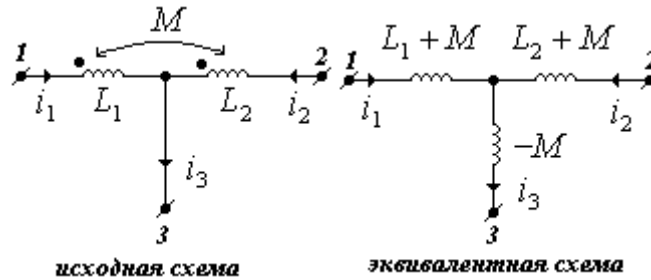
Если два индуктивно связанных элемента имеют общий узел, то возможна развязка их индуктивной связи. Возможны два способа соединения элементов. Пусть одноимённые зажимы подключаются к общему узлу, тогда эквивалентная схема будет такой



Покажем, что эти схемы эквивалентны, т.е. при равенстве токов будут равны и напряжения на зажимах.

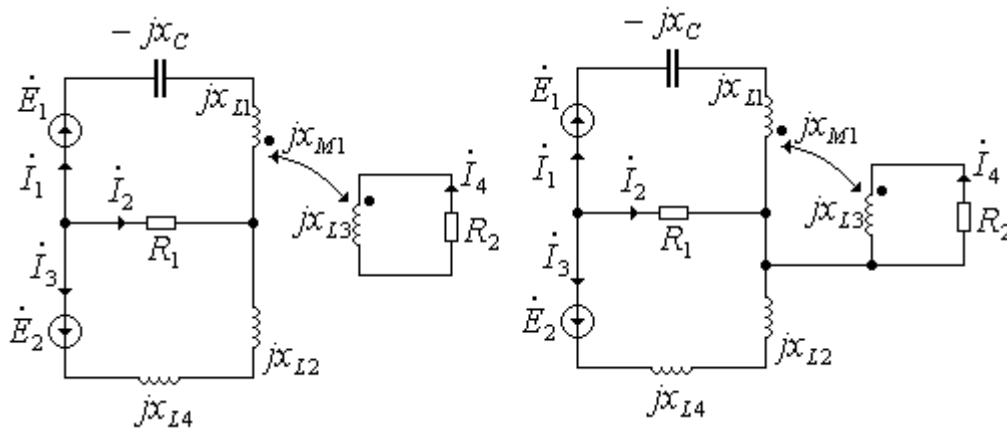
Исходная схема	Эквивалентная схема
По второму з. Кирхгофа	По второму з. Кирхгофа
$u_{13} - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0$	$u_{13} - M \frac{di_3}{dt} - (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} = 0$
$u_{13} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$	$u_{13} = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_3}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} =$ $L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$

Если в узле соединяются разноимённые зажимы индуктивно связанных элементов, то эквивалентная схема будет такой

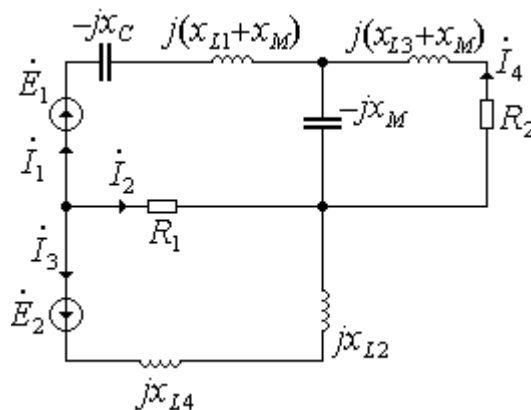


Самостоятельно убедитесь в её эквивалентности исходной схеме.

Пример. Избавимся от индуктивной связи. Для этого соединим проводником, например, разноимённые зажимы индуктивно связанных элементов. В схемной модели это можно делать, так как при этом не появилось нового контура, и режим цепи не будет изменён.



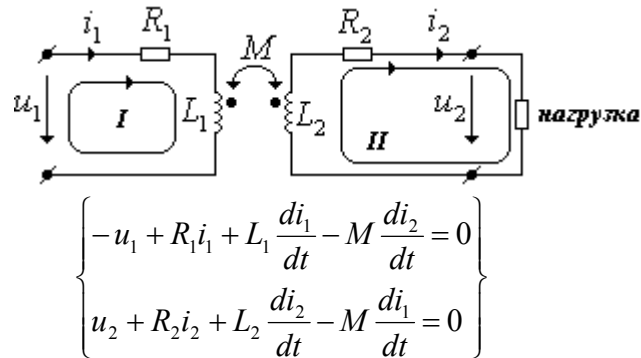
Решение:



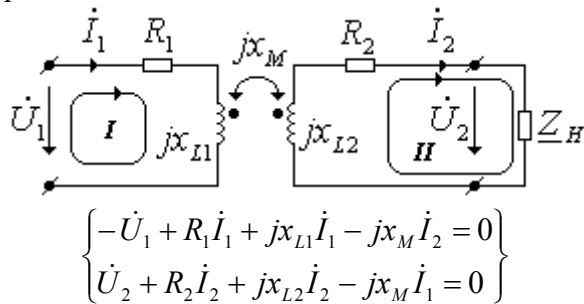
Линейный трансформатор

Линейный трансформатор состоит из двух или более, индуктивно связанных катушек (обмоток). Свойство линейности достигается употреблением не ферромагнитных материалов магнитопровода. Линейный трансформатор имеет ещё другое название - воздушный трансформатор, т.е. магнитопроводом для его магнитного потока является воздушное пространство между обмотками. Магнитная проницаемость воздуха близка к единице и не зависит от величины напряженности магнитного поля. Линейный трансформатор находит применение в измерительных устройствах, в устройствах радиосвязи на больших частотах.

Составим систему уравнений Кирхгофа для первичной и вторичной обмоток трансформатора.

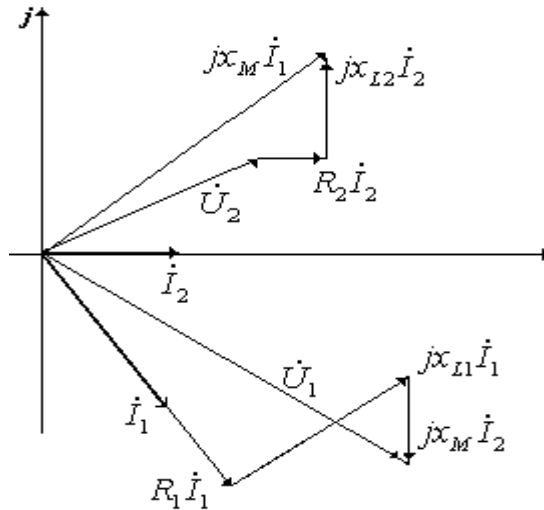


Для синусоидального режима



Построим векторную диаграмму, приняв активно индуктивный характер нагрузки:

1. задаёмся положением векторов тока вторичной обмотки \dot{I}_2 и напряжения \dot{U}_2 .
2. откладываем вектора напряжений на вторичной обмотке $R_2 \dot{I}_2$ и $jx_{L2} \dot{I}_2$.
3. вектор индуцированной эдс получаем по второму закону Кирхгофа для контура вторичной обмотки $jx_M \dot{I}_1 = \dot{U}_2 + R_2 \dot{I}_2 + jx_{L2} \dot{I}_2$.
4. откладываем вектор тока первичной обмотки \dot{I}_1 .
5. откладываем вектора напряжений на первичной обмотке $-R_1 \dot{I}_1$ и $-jx_{L1} \dot{I}_1$.
6. откладываем вектор индуцированной эдс $jx_M \dot{I}_2$.
7. вектор входной эдс получаем по второму закону Кирхгофа для контура первичной обмотки $\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + jx_{L1} \dot{I}_1 - jx_M \dot{I}_2$.



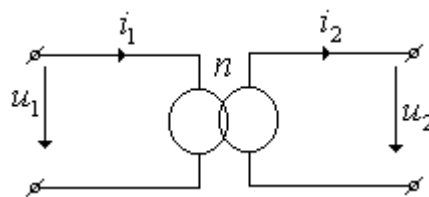
Сопротивление первичной обмотки в режиме холостого хода отличается от входного сопротивления в режиме нагрузки на величину вносимого сопротивления. Определим вносимое сопротивление, т.е. сопротивление, вносимое в первичную обмотку из вторичной обмотки. Для этого разрешим систему уравнений трансформатора относительно тока первичной обмотки и по закону Ома вычислим входное сопротивление

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{x_M^2}{(R_2 + r_H) + j(x_{L2} + x_H)} + (R_1 + jx_{L1}) = \\ &= \frac{x_M^2 (R_2 + r_H)}{\underbrace{(R_2 + r_H)^2 + (x_{L2} + x_H)^2}_{\text{активная составляющая вносимого сопротивления}}} - j \frac{x_M^2 (x_{L2} + x_H)}{\underbrace{(R_2 + r_H)^2 + (x_{L2} + x_H)^2}_{\text{реактивная составляющая вносимого сопротивления}}} + \\ &\quad + (R_1 + jx_{L1}) = \\ &= (R_1 + R_{\text{вн}}) + j(x_{L1} + x_{\text{вн}}) \\ R_{\text{вн}} &= \frac{x_M^2 (R_2 + r_H)}{(R_2 + r_H)^2 + (x_{L2} + x_H)^2} \\ x_{\text{вн}} &= -\frac{x_M^2 (x_{L2} + x_H)}{(R_2 + r_H)^2 + (x_{L2} + x_H)^2} \end{aligned}$$

Идеальный трансформатор.

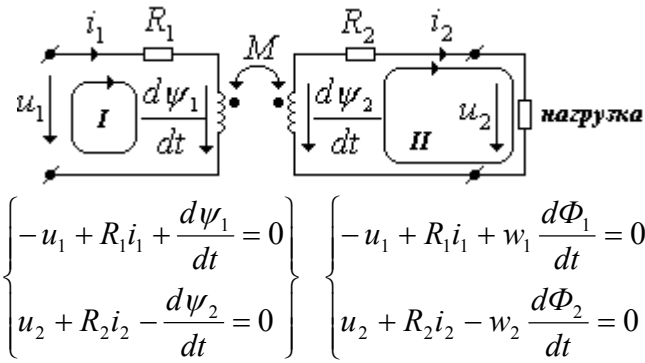
На начальных этапах проектирования инженеру требуется простая модель, чтобы получить качественные соотношения. Вместо дифференциальных уравнений для этого необходимо иметь алгебраические уравнения, которые могут дать связь электрических параметров устройства с конструктивными параметрами. Использование таких связей позволит быстро получать начальные приближения в процессе расчёта параметров устройства, проектируемого в направлении заданных свойств (высокий КПД, минимальная масса, стоимость и пр.) с использованием более сложных моделей и соотношений. Например, у идеального трансформатора токи и напряжения связаны через коэффициент трансформации n :

$$\begin{aligned} n &= \frac{w_2}{w_1} \\ u_2 &= n \cdot u_1 \\ i_2 &= \frac{1}{n} i_1 \end{aligned}$$



Схемное обозначение идеального трансформатора

В реальном трансформаторе величины связаны многим сложнее, т.к. приходится учитывать величины сопротивлений обмоток, не идеальность магнитной связи обмоток, наличие тока намагничивания, нелинейность намагничивания материала магнитопровода. Технология изготовления трансформаторов отражает стремление достигнуть свойств идеального трансформатора. Так, например, если взять большой диаметр проводов обмоток, тороидальный сердечник из ферромагнитного материала с большой магнитной проницаемостью, аккуратно и плотно сделать обмотку, то можно в пределе добиться идеальной трансформации напряжения. Посмотрим, как упрощаются при этом уравнения трансформатора.



Поток каждой обмотки состоит из потока рассеяния Φ_s и потока Φ_o общего для обеих обмоток.

$$\begin{cases} -u_1 + R_1 i_1 + w_1 \frac{d(\Phi_o + \Phi_{s1})}{dt} = 0 \\ u_2 + R_2 i_2 - w_2 \frac{d(\Phi_o + \Phi_{s2})}{dt} = 0 \end{cases}$$

Пусть будет выполняться условие сверхпроводимости обмоток, т.е. $R_1 \rightarrow 0$, $R_2 \rightarrow 0$ и условие идеальной магнитной связи обмоток, т.е. $k_{cs} \rightarrow 1$, тогда

$$\begin{cases} -u_1 + w_1 \frac{d\Phi_o}{dt} = 0 \\ u_2 - w_2 \frac{d\Phi_o}{dt} = 0 \end{cases}$$

Отсюда

$$u_2 = \frac{w_1}{w_2} u_1 = n \cdot u_1.$$

Трансформатор, для которого выполняются условия $R_1 \rightarrow 0$, $R_2 \rightarrow 0$ и $k_{cs} \rightarrow 1$ называется совершенным трансформатором. Совершенный трансформатор является идеальным трансформатором напряжения. Построим его схемную модель. Для этого будем использовать равенство потоков первичной и вторичной обмоток.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{d}{dt} \psi_1 & u_2 &= \frac{d}{dt} \psi_2 \\ u_1 &= \frac{d}{dt} (L_1 i_1 - M i_2) & u_2 &= \frac{d}{dt} (-L_2 i_2 + M i_1) \\ \psi_1 &= L_1 i_1 - M i_2 & \psi_2 &= -L_2 i_2 + M i_1 \\ \Phi_1 &= \frac{\psi_1}{w_1} = \frac{L_1}{w_1} i_1 - \frac{M}{w_1} i_2 & \Phi_2 &= \frac{\psi_2}{w_2} = -\frac{L_2}{w_2} i_2 + \frac{M}{w_2} i_1 \end{aligned}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_0.$$

Следовательно,

$$\frac{L_1}{w_1} = \frac{M}{w_2} \text{ и } \frac{M}{L_1} = \frac{w_2}{w_1} = n,$$

а также

$$\frac{L_2}{w_2} = \frac{M}{w_1} \text{ и } \frac{M}{L_2} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{n}.$$

Рассмотрим уравнение первичной обмотки

$$\psi_1 = L_1 i_1 - M i_2$$

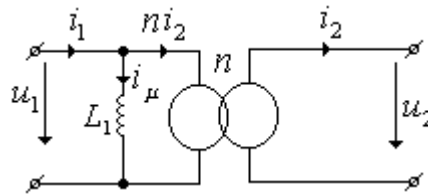
$$\frac{\psi_1}{L_1} = i_1 - \frac{M}{L_1} i_2 = i_1 - n i_2$$

$$\frac{\psi_1}{L_1} = i_\mu \text{ - ток намагничивания,}$$

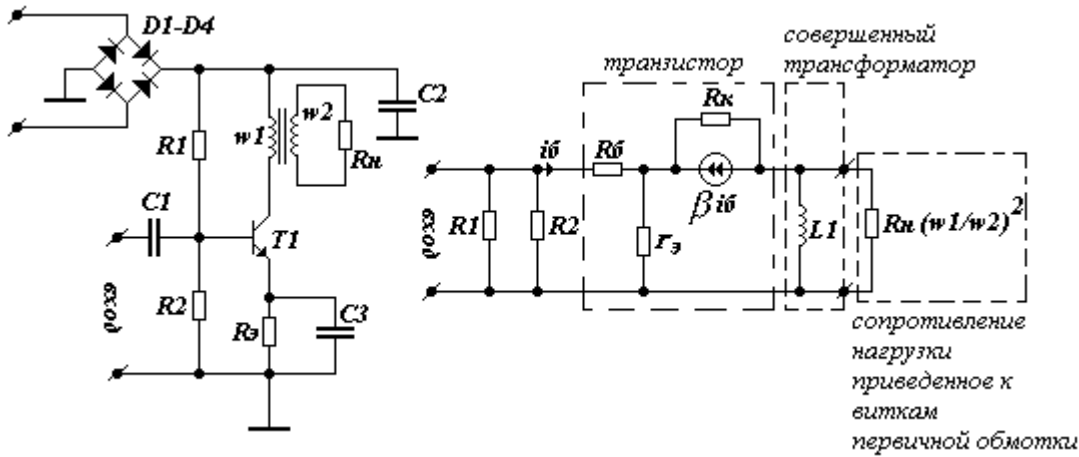
$$L_1 = L_\mu \text{ -индуктивность намагничивания}$$

$$i_1 = i_\mu + n i_2$$

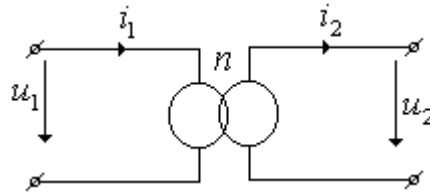
Мы получили уравнение по первому закону Кирхгофа для схемной модели совершенного трансформатора



С применением модели совершенного трансформатора мы уже имели дело в первой лекции, когда строили схему замещения транзисторного усилителя по переменному сигналу.



Для идеальной трансформации тока необходимо, чтобы индуктивность намагничивания была бесконечно большой, т.е. $L_\mu \rightarrow \infty$.

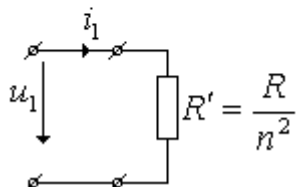
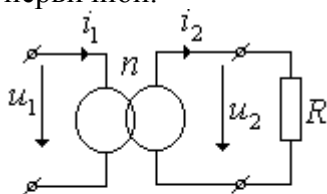


Идеальный трансформатор является безынерционным элементом, следовательно мгновенные мощности его первичной и вторичной обмоток равны.

$$p_1 = p_2$$

$$u_1 i_1 = u_2 i_2$$

Это можно использовать, чтобы показать, как вторичная цепь может быть приведена к первичной.



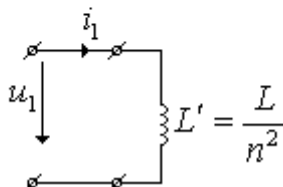
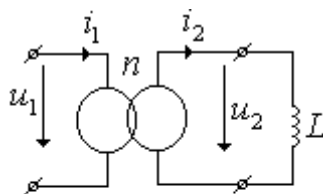
$$u_1 i_1 = u_2 i_2$$

$$u_1 i_1 = R i_2 \cdot i_2 = R i_2^2 = R \frac{i_1^2}{n^2}$$

$$R_1 = \frac{u_1}{i_1} = R \frac{1}{n^2}$$

Сопротивление нагрузки
приведённое к виткам
первичной обмотки

$$R' = R \frac{1}{n^2}$$



$$u_1 i_1 = u_2 i_2$$

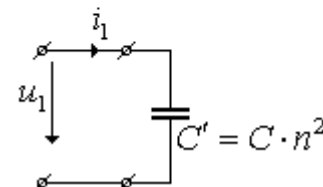
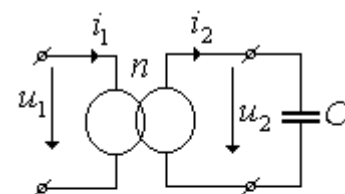
$$u_1 i_1 = L \frac{di_2}{dt} i_2 =$$

$$L \frac{d i_1 / n}{dt} \frac{i_1}{n} = L \frac{d i_1}{dt} \frac{i_1}{n^2}$$

$$u_1 = \frac{L}{n^2} \frac{d i_1}{dt}$$

Индуктивность нагрузки
приведённая к виткам
первичной обмотки

$$L' = \frac{L}{n^2}$$



$$u_1 i_1 = u_2 i_2$$

$$u_1 i_1 = C \frac{d u_2}{dt} u_2 =$$

$$C \frac{d n u_1}{dt} n u_1 = C n^2 \frac{d u_1}{dt} u_1$$

$$i_1 = C n^2 \frac{d u_1}{dt}$$

Ёмкость нагрузки
приведённая к виткам
первичной обмотки

$$C' = C n^2$$

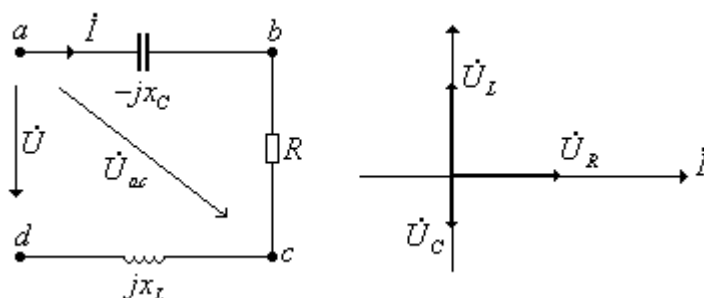
Вывод: трансформатор может быть использован, как трансформатор напряжения или тока, а также в качестве устройства согласования. Согласование высокоомного выхода источника сигнала с нагрузкой может потребоваться с целью передачи максимальной мощности. Путём изменения соотношения витков обмоток можно достигнуть равенства $R_{\text{вых}} = R'$ и, тем самым, удовлетворить условию передачи максимальной мощности.

ЛЕКЦИЯ 8

ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ.

Тему трёхфазных цепей необходимо предварить сообщением о топографических диаграммах. **Топографическая диаграмма** (топограмма) – это графическое изображение комплексных потенциалов точек схемы, в котором каждой точке схемы соответствует точка на комплексной плоскости. Топограмма содержит информацию о топологии схемы и позволяет определить напряжение между любыми двумя точками схемы.

Пример. Построить по имеющейся векторной диаграмме напряжений топографическую диаграмму неразветвлённой цепи. Используя построенную топограмму, найти напряжение между точками a и c .



Решение:

1. Выберем точку b в качестве базовой и примем её потенциал равным нулю, тогда положение точки b на комплексной плоскости будет совпадать с началом её координат.
2. Вычисляем потенциал точки a .

$$\dot{I} = \frac{\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b}{-jx_C}, \quad \dot{\varphi}_b - jx_C \dot{I} = \dot{\varphi}_a$$

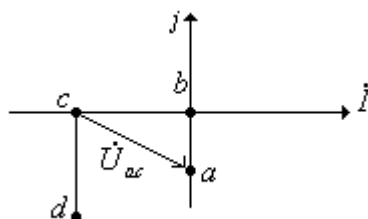
3. Вычисляем потенциал точки c .

$$\dot{I} = \frac{\dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_c}{R}, \quad \dot{\varphi}_b - R \dot{I} = \dot{\varphi}_c$$

4. Вычисляем потенциал точки d .

$$\dot{I} = \frac{\dot{\varphi}_c - \dot{\varphi}_d}{jx_L}, \quad \dot{\varphi}_c - jx_L \dot{I} = \dot{\varphi}_d$$

5. Строим топограмму.

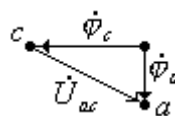


6. Для определения напряжения между точками a и c необходимо построить разницу векторов $\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_c$.

$$\dot{U}_{ac} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_c$$

или

$$\dot{\varphi}_a = \dot{U}_{ac} + \dot{\varphi}_c$$



Внимание! Согласно правилу вычитания векторов направление вектора напряжения на топограмме будет противоположным тому, которое принято для положительной величины напряжения на схеме.

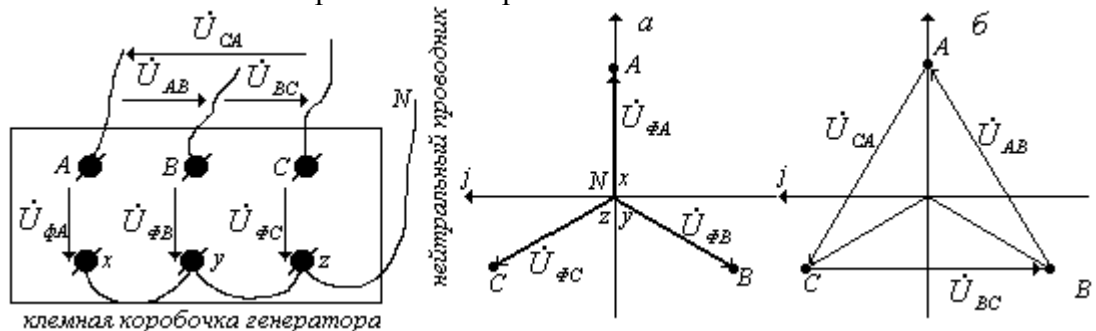
Трёхфазная цепь – это электрическая цепь переменного тока, в которой действуют три синусоидальных напряжения одинаковой частоты, сдвинутые по фазе друг относительно друга на 120° . Трёхфазные цепи экономичнее однофазных, дают существенно меньшие пульсации тока после выпрямления, позволяют простыми средствами получать вращающееся магнитное поле в электродвигателях.

Доливо-добровольский Михаил Осипович (1861/62-1919), российский электротехник, создатель техники трёхфазного переменного тока. Работал в Германии. Доказал оптимальность системы трёхфазного тока, создал (1888-89) трёхфазный асинхронный двигатель, осуществил (1891) первую электропередачу трёхфазного тока.

Трёхфазные источники.



Источниками трёхфазного напряжения являются вращающиеся электрические машины: синхронные или асинхронные генераторы. Принцип действия генератора основан на явлении электромагнитной индукции. Магнитное поле ротора с равномерной скоростью вращается и наводит в симметрично расположенных обмотках напряжения, которые могут быть изображены системой симметричных векторов.



На рисунке показана схема соединения выводов обмоток генератора трёхфазного напряжения в звезду, топографическая диаграмма и совмещенные с ней векторные диаграммы а) фазных и б) линейных напряжений.

Комплексы фазных напряжений

$$\dot{U}_{\phi A} = U_{\phi} \angle 0^\circ$$

$$\dot{U}_{\phi B} = U_{\phi} \angle -120^\circ = U_{\phi} \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\dot{U}_{\phi C} = U_{\phi} \angle 120^\circ = U_{\phi} \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

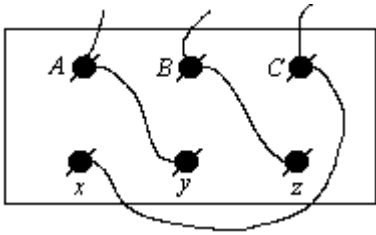
Комплексы линейных напряжений

$$\dot{U}_{AB} = U_L \angle 30^\circ = U_L \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right)$$

$$\dot{U}_{BC} = U_L \angle -90^\circ = -j U_L$$

$$\dot{U}_{CA} = U_L \angle 150^\circ = U_L \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right)$$

Вторым способом соединения обмоток источника трёхфазного напряжения является соединение треугольником.



Для схемы соединения в треугольник имеет место равенство модулей фазного и линейного напряжения, т.е. $U_L = U_\phi$.

Для схемы соединения обмоток источника в звезду модули линейного и фазного напряжений связаны соотношением $U_L = \sqrt{3}U_\phi$. Покажем это с помощью, построенной выше топограммы.

Рассмотрим треугольник NAB . По теореме косинусов определим сторону AB , т.е. U_L .

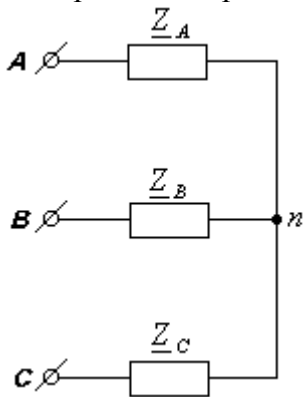
$$AB^2 = NA^2 + NB^2 - 2NA \cdot NB \cdot \cos(120^\circ)$$

$$U_L^2 = U_\phi^2 + U_\phi^2 - 2U_\phi \cdot U_\phi \cdot \cos(120^\circ) = 3U_\phi^2$$

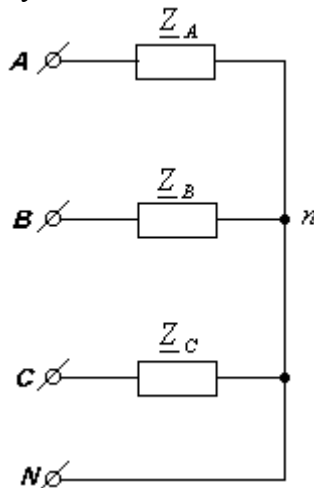
$$U_L = \sqrt{3}U_\phi$$

Нагрузка трёхфазной цепи.

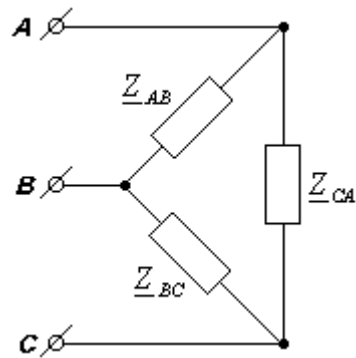
Основные схемы соединения нагрузки – это звезда (с нейтральным проводником или без нейтрального проводника) и треугольник.



Соединение нагрузки в звезду без нейтрального проводника



Соединение нагрузки в звезду с нейтральным проводником

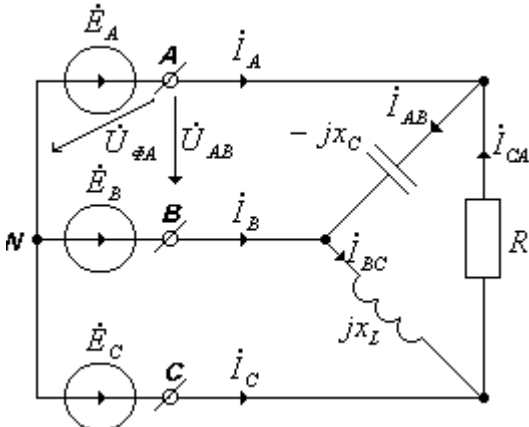


Соединение нагрузки в треугольник.

Когда комплексные сопротивления всех трех фаз равны $Z_A = Z_B = Z_C$, нагрузку называют симметричной. Для симметричной нагрузки анализ режима цепи может быть упрощен путем сведения к расчету однофазной схемы, но об этом позже.

Анализ режима трёхфазной цепи.

Пример 1. Расчет токов в цепи с нагрузкой соединенной в треугольник.



Дано:

$$R = x_L = x_C = 38 \text{ Ом}$$

$$U_\phi = 220 \text{ В}$$

Найти:

Линейные токи I_A, I_B, I_C и токи элементов нагрузки I_{AB}, I_{BC}, I_{CA} .

Решение:

Токи \dot{I}_{AB} , \dot{I}_{BC} , \dot{I}_{CA} могут быть найдены по закону Ома поскольку известны напряжения на элементах нагрузки. При соединении в треугольник к элементам нагрузки прикладываются линейные напряжения.

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{-jx_C} = \frac{220\sqrt{3}\angle 30^\circ}{-j38} = \frac{220\sqrt{3}\angle 30^\circ}{38\angle -90^\circ} = 10\angle(30^\circ - (-90^\circ)) = 10\angle 120^\circ, A$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{jx_L} = \frac{220\sqrt{3}\angle -90^\circ}{j38} = \frac{220\sqrt{3}\angle -90^\circ}{38\angle 90^\circ} = 10\angle(-90^\circ - 90^\circ) = 10\angle -180^\circ, A$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{R} = \frac{220\sqrt{3}\angle 150^\circ}{38 + j0} = \frac{220\sqrt{3}\angle 150^\circ}{38\angle 0^\circ} = 10\angle 150^\circ, A$$

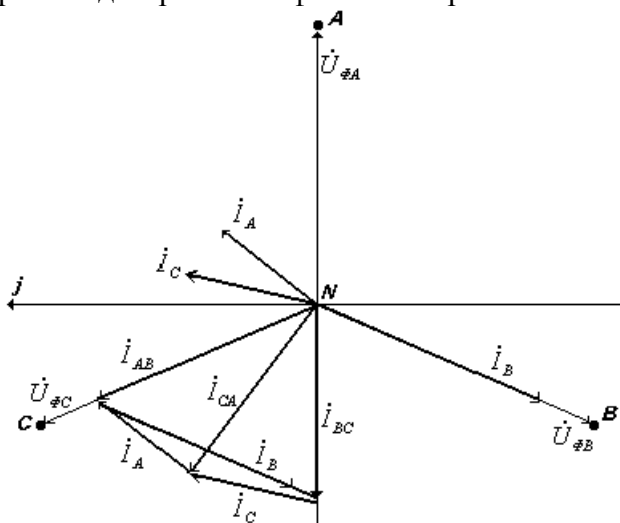
Линейные токи находим по первому закону Кирхгофа для узлов **A**, **B**, **C**.

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 10\angle 120^\circ - 10\angle 150^\circ = 10\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 10\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = 10\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + j\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

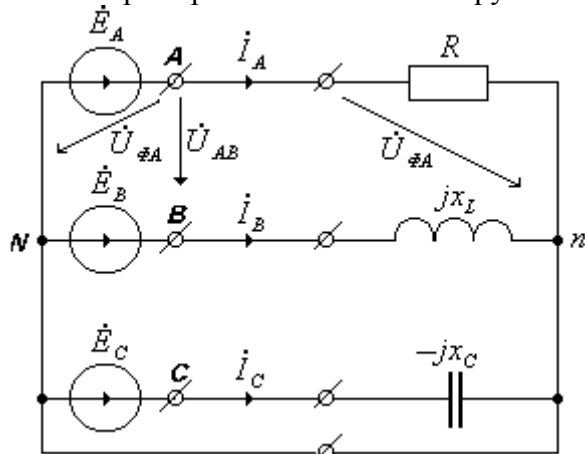
$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = 10\angle -180^\circ - 10\angle 120^\circ = -10 - 10\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = 10\angle 150^\circ - 10\angle -180^\circ = 10\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) - (-10) = 10\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)$$

Изобразим полученное решение с помощью топографической диаграммы и совмещенными с ней векторными диаграммами фазных напряжений и токов.



Пример 2. Расчет токов нагрузки соединенной в звезду с нейтральным проводником.



Дано:
 $R = x_L = x_C = 22 \text{ Ом}$
 $U_\phi = 220 \text{ В}$

Найти:
 Линейные токи $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$.

Решение:

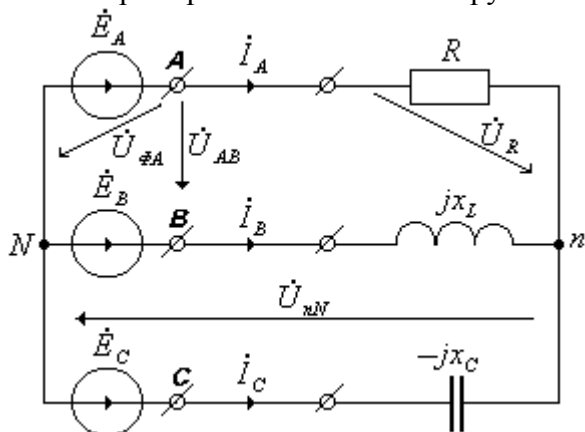
Наличие нейтрального проводника приводит к выравниванию потенциалов точек N и n . Следовательно, напряжения на элементах нагрузки нам известны и они равны фазным ЭДС.

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{\dot{U}_{\phi A}}{R} = \frac{220 \angle 0^\circ}{22} = \frac{220 \angle 0^\circ}{22} = 10, A \\ \dot{I}_B &= \frac{\dot{U}_{\phi B}}{jx_L} = \frac{220 \angle -120^\circ}{j22} = \frac{220 \angle -120^\circ}{22 \angle 90^\circ} = 10 \angle (-120^\circ - 90^\circ) = 10 \angle -210^\circ, A \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}_{\phi C}}{-jx_C} = \frac{220 \angle 120^\circ}{-j22} = \frac{220 \sqrt{3} \angle 120^\circ}{22 \angle -90^\circ} = 10 \angle 210^\circ, A \end{aligned}$$

Вычислим ток нейтрального проводника с помощью первого закона Кирхгофа

$$\begin{aligned} \dot{I}_N &= \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 10 + 10 \angle -210^\circ + 10 \angle 210^\circ = \\ &= 10 + 10 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) + 10 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = 10(1 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Пример 3. Расчет токов нагрузки соединенной в звезду без нейтрального проводника.



Дано:

$$R = x_L = x_C = 22 \text{ Ом}$$

$$U_\phi = 220 \text{ В}$$

Найти:

Линейные токи $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$.

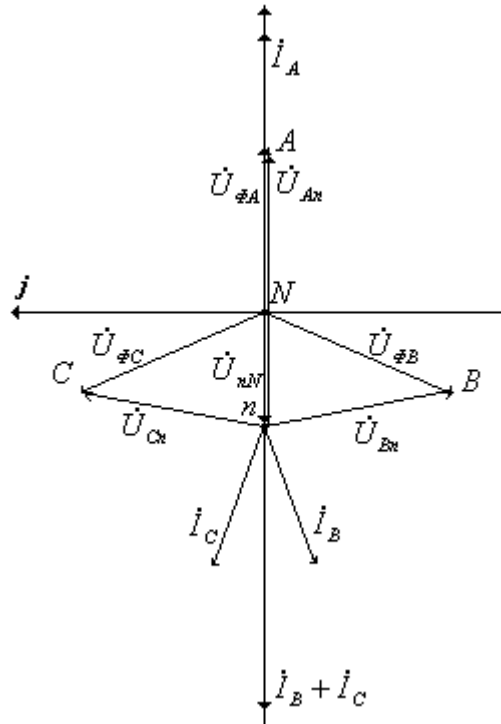
Решение:

Отсутствие нейтрального проводника и несимметричность нагрузки приводит к смещению нейтрали. Термином смещение нейтрали обозначают напряжение \dot{U}_{nN} линия, которого соединяет точки n и N на топографической диаграмме. Зададимся потенциалом точки N , равным нулю, вычислим методом узловых потенциалов смещения нейтрали, построим топограмму и совмещённую с ней векторную диаграмму токов.

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_n \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jx_L} + \frac{1}{-jx_C} \right) &= \dot{E}_A \frac{1}{R} + \dot{E}_B \frac{1}{jx_L} + \dot{E}_C \frac{1}{-jx_C} \\ \dot{\phi}_n &= \frac{\dot{E}_A \frac{1}{R} + \dot{E}_B \frac{1}{jx_L} + \dot{E}_C \frac{1}{-jx_C}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jx_L} + \frac{1}{-jx_C}} \quad \text{При } R=x_L=x_C = \dot{E}_A - j\dot{E}_B + j\dot{E}_C \end{aligned}$$

$$\dot{\phi}_n = \dot{E}_A - j\dot{E}_B + j\dot{E}_C = U_\phi \left(1 - j \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + j \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = U_\phi (1 - \sqrt{3})$$

$$\dot{U}_{nN} = \dot{\phi}_n - \dot{\phi}_N = \dot{\phi}_n - 0 = \dot{\phi}_n = U_\phi (1 - \sqrt{3})$$



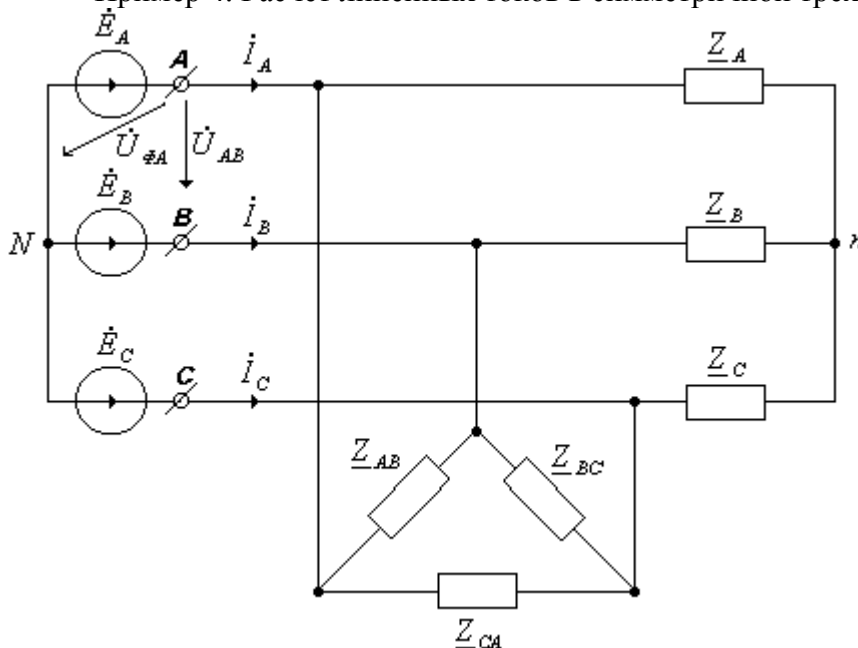
Зная потенциал точки n , можно уже вычислить линейные токи

$$i_A = \frac{\dot{\phi}_A - \dot{\phi}_n}{R} = \frac{U_\phi(1 - (1 - \sqrt{3}))}{R} = \frac{220(1 - (1 - \sqrt{3}))}{22} = 10\sqrt{3}$$

$$i_B = \frac{\dot{\phi}_B - \dot{\phi}_n}{jx_L} = \frac{220 \angle -120^\circ - 220(1 - \sqrt{3})}{j22} = \frac{220\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 + \sqrt{3}}{j22} = 10\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\right)$$

$$i_C = \frac{\dot{\phi}_C - \dot{\phi}_n}{-jx_C} = \frac{220 \angle 120^\circ - 220(1 - \sqrt{3})}{-j22} = \frac{220\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 + \sqrt{3}}{-j22} = 10\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\right)$$

Пример 4. Расчет линейных токов в симметричной трехфазной цепи.



$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}$$

И

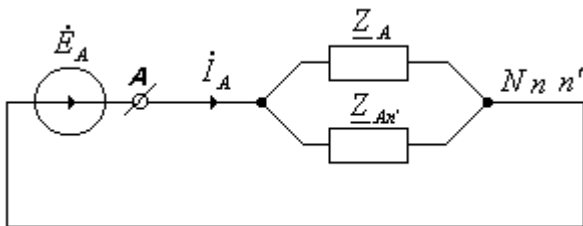
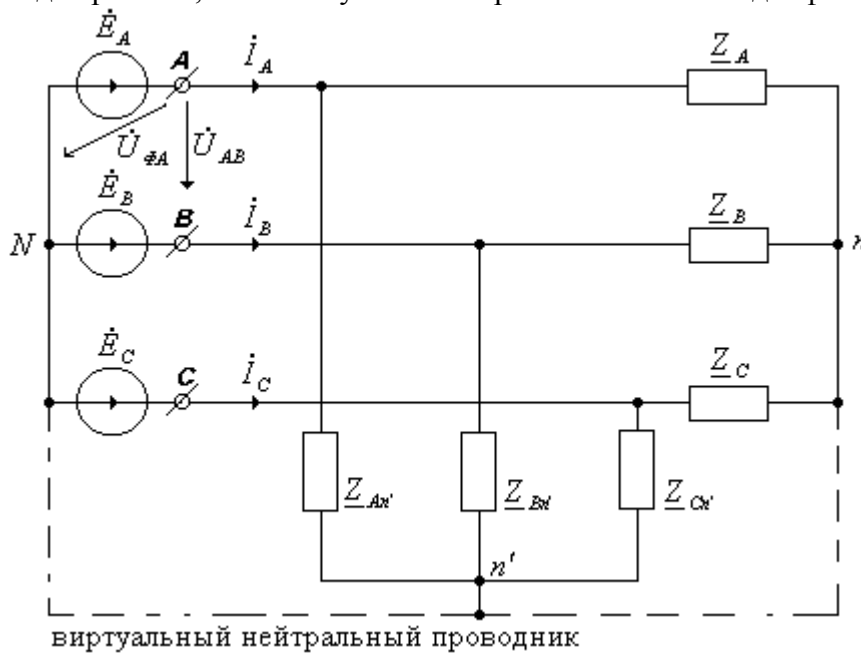
$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z}_\Delta$$

Решение:

Задача дополнительно усложнена параллельным включением нагрузки в звезду и в треугольник. С целью привести нагрузку к одному виду избавимся от треугольника путём использования преобразования треугольник-звезда. Для равных сопротивлений формула преобразования упрощается

$$\underline{Z}_{An'} = \underline{Z}_{Bn'} = \underline{Z}_{Cn'} = \frac{1}{3} \underline{Z}_{\Delta}.$$

Пусть потенциал точки N равен нулю, тогда потенциалы точек n и n' могут быть рассчитаны по методу узловых потенциалов. Самостоятельно убедитесь в том, что для симметричной нагрузки они будут равны нулю. Если потенциалы точек равны, то их можно на модели соединить проводником без изменения режима. Это позволит изобразить схему в виде, более удобном для расчета, т.е. совокупностью трёх независимых однофазных схем.



$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{\frac{\underline{Z}_A \underline{Z}_{An'}}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_{An'}}} = \frac{\dot{E}_A}{\frac{\underline{Z}_A \underline{Z}_{\Delta}}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_{An'}}} = U_{\phi} \frac{3\underline{Z} + \underline{Z}_{\Delta}}{\underline{Z} \cdot \underline{Z}_{\Delta}}$$

Однофазная схема замещения симметричной трехфазной цепи.

Для расчета токов фаз B и C нет необходимости рассматривать однофазные схемы и делать вычисления, так как токи \dot{I}_B и \dot{I}_C будут отличаться от тока фазы A , только фазами.

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A \cdot 1e^{-j120^\circ}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A \cdot 1e^{j120^\circ}$$

Мощность трёхфазной цепи

Мощность трёхфазной цепи, очевидно, следует определить как сумму мощностей всех её трех фаз, т.е.

$$P_{3\phi} = P_A + P_B + P_C.$$

Согласно закону сохранения энергии, в цепи выполняется баланс мощностей. Следовательно, мощность трёхфазной цепи может быть, в равной мере точно, определена как сумма мощностей, потребляемых по каждой фазе, или же, как сумма мощностей, генерируемых каждой фазной эдс.

$$P_{3xf} = P_{A_{np}} + P_{B_{np}} + P_{C_{np}} \text{ или } P_{3xf} = P_{A_{уст}} + P_{B_{уст}} + P_{C_{уст}}.$$

Вычислим активную мощность в цепи, рассматриваемой в примере 3 предыдущего раздела. Воспользуемся уже вычисленными значениями линейных токов и смещения нейтрали.

$$\begin{aligned} P_{3xf} &= P_{A_{np}} + P_{B_{np}} + P_{C_{np}} = \operatorname{Re}\{(\dot{\varphi}_A - \dot{\varphi}_n)^* I_A\} + \operatorname{Re}\{(\dot{\varphi}_B - \dot{\varphi}_n)^* I_B\} + \operatorname{Re}\{(\dot{\varphi}_C - \dot{\varphi}_n)^* I_C\} = \\ &= \operatorname{Re}\{(220(1 - (1 - \sqrt{3}))) \cdot 10\sqrt{3}\} + \operatorname{Re}\{(220(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - (1 - \sqrt{3}))) \cdot 10(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j(-\frac{3}{2} + \sqrt{3}))\} + \\ &+ \operatorname{Re}\{(220(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - (1 - \sqrt{3}))) \cdot 10(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j(-\frac{3}{2} + \sqrt{3}))\} = 6600 + 0 + 0 = 6600, \text{ Bm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{3xf} &= P_{A_{уст}} + P_{B_{уст}} + P_{C_{уст}} = \operatorname{Re}\{\dot{E}_A I_A^*\} + \operatorname{Re}\{\dot{E}_B I_B^*\} + \operatorname{Re}\{\dot{E}_C I_C^*\} = \\ &= \operatorname{Re}\{(220 \cdot 10\sqrt{3})\} + \operatorname{Re}\{(220(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot 10(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j(-\frac{3}{2} + \sqrt{3}))\} + \\ &+ \operatorname{Re}\{(220(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot 10(\frac{\sqrt{3}}{2} + j(-\frac{3}{2} + \sqrt{3}))\} = 3810.5 + 1394.7 + 1394.7 = 6600, \text{ Bm} \end{aligned}$$

Вывод. В не симметричной трехфазной цепи без нейтрального проводника мощность фазной эдс, в общем случае, не будет равняться мощности нагрузки в этой фазе, т.е. $P_{A_{уст}} \neq P_{A_{np}}$, $P_{B_{уст}} \neq P_{B_{np}}$, $P_{C_{уст}} \neq P_{C_{np}}$.

Рассмотрим мгновенную мощность в симметричной трехфазной цепи.

$$\begin{aligned} p_{3xf} &= p_A + p_B + p_C = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C = \\ &= \sqrt{2}U_\phi \sin(\omega t + \varphi_u) \cdot \sqrt{2}I_\phi \sin(\omega t + \varphi_i) + \\ &+ \sqrt{2}U_\phi \sin(\omega t + \varphi_u - 120^\circ) \cdot \sqrt{2}I_\phi \sin(\omega t + \varphi_i - 120^\circ) + \\ &+ \sqrt{2}U_\phi \sin(\omega t + \varphi_u + 120^\circ) \cdot \sqrt{2}I_\phi \sin(\omega t + \varphi_i + 120^\circ) = \\ &= 2U_\phi I_\phi [\frac{1}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) - \frac{1}{2} \cos(\omega t + \varphi_u + \varphi_i)] + \\ &+ 2U_\phi I_\phi [\frac{1}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) - \frac{1}{2} \cos(2\omega t - 240^\circ + \varphi_u + \varphi_i)] + \\ &+ 2U_\phi I_\phi [\frac{1}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) - \frac{1}{2} \cos(2\omega t + 240^\circ + \varphi_u + \varphi_i)] = \\ &= 3 \cdot U_\phi I_\phi \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 3 \cdot U_\phi I_\phi \cos(\varphi) \end{aligned}$$

Получается, что мгновенная мощность симметричной трехфазной цепи не зависит от времени. Следовательно, активная мощность P равная, среднему за период значению от мгновенной мощности, равна p .

Активная мощность $p_{3xf} = P_{3xf} = 3P_{1\phi} = 3 \cdot U_\phi I_\phi \cos(\varphi) = \sqrt{3}U_L I_L \cos(\varphi)$, где

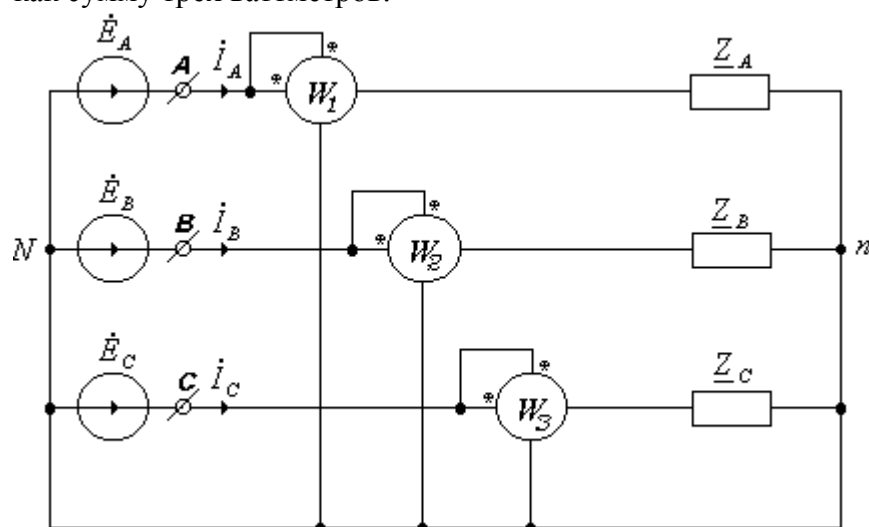
$$U_L = \sqrt{3}U_\phi, \quad I_L = I_\phi$$

Реактивная мощность $Q_{3xf} = 3Q_{1\phi} = 3U_\phi I_\phi \sin(\varphi) = \sqrt{3}U_L I_L \sin(\varphi)$.

Полная мощность $S_{3xf} = \sqrt{P_{3xf}^2 + Q_{3xf}^2}$.

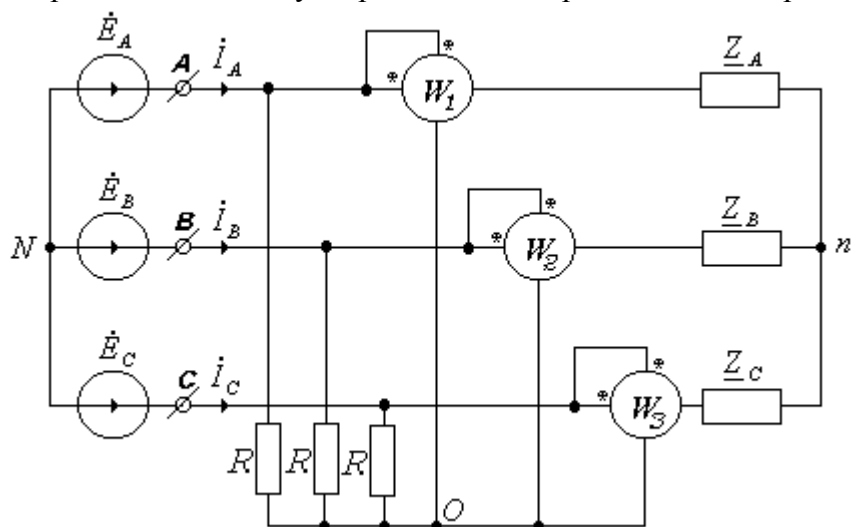
Измерение мощности в трехфазных цепях.

Если в цепи есть нейтральный проводник, то потребляемую мощность можно найти как сумму трёх ваттметров.



$$P_{3\text{ф}} = \Pi_{W1} + \Pi_{W2} + \Pi_{W3}$$

В случае отсутствия нейтрального проводника создают искусственную нейтраль, т.е. точку с нулевым потенциалом. Значения резисторов следует выбирать из условия $R \ll R_W$ (R_W – сопротивление обмотки напряжения ваттметра). Если сопротивления R будут соизмеримыми с сопротивлениями ваттметров, которые могут сильно отличаться друг от друга, то потенциал точки O будет смещен относительно нейтрали и к ваттметрам не будут прикладываться фазные напряжения. С другой стороны, слишком маленькие значения сопротивлений R могут привести к неоправданным потерям энергии.



$$P_{3\text{ф}} = \Pi_{W1} + \Pi_{W2} + \Pi_{W3}$$

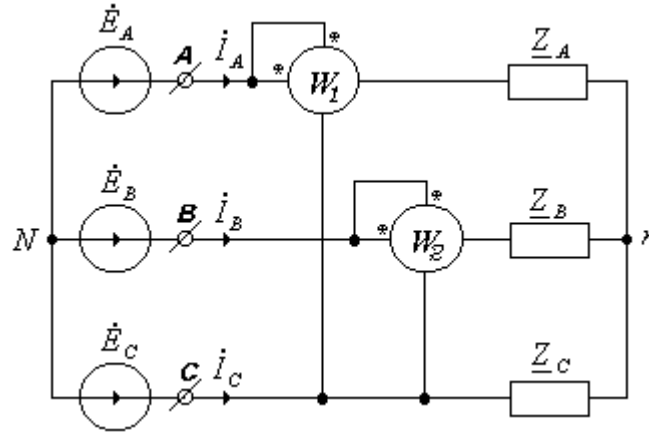
Иногда не требуется знать, как распределяется потребляемая мощность по фазам, тогда мощность трехфазной цепи можно измерить двумя ваттметрами. Такая схема называется схемой Арона.

$$P_{3\text{ф}} = \Pi_{W1} + \Pi_{W2}$$

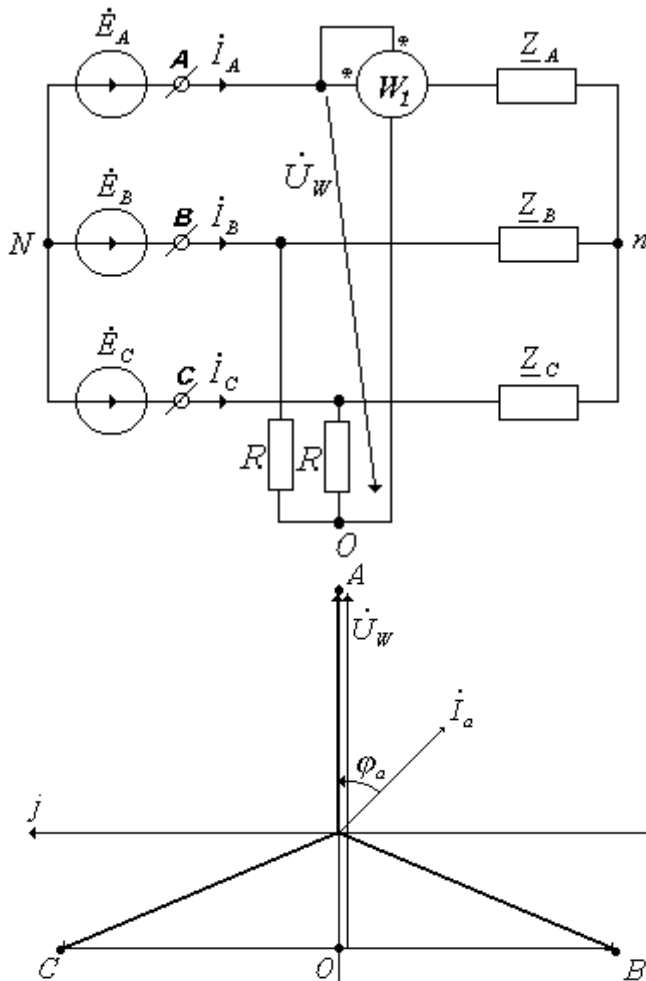
Покажем справедливость данного метода

$$\begin{aligned} P_{3\text{ф}} &= \Pi_{W1} + \Pi_{W2} = \text{Re}[\dot{U}_{ac}^* I_a] + \text{Re}[\dot{U}_{bc}^* I_b] = \\ &= \text{Re}[(\dot{U}_a - \dot{U}_c)^* I_a + (\dot{U}_b - \dot{U}_c)^* I_b] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{Re}[\dot{U}_a^* I_a - \dot{U}_c^* I_a + \dot{U}_b^* I_b - \dot{U}_c^* I_b] = \\
 &= \operatorname{Re}[\dot{U}_a^* I_a + \dot{U}_b^* I_b + \dot{U}_c^* (-I_a - I_b)] = \\
 &= \operatorname{Re}[\dot{U}_a^* I_a + \dot{U}_b^* I_b + \dot{U}_c^* I_c] = \\
 &= P_{\phi a} + P_{\phi b} + P_{\phi c}, \text{ ч.м.д.}
 \end{aligned}$$



С помощью одного ваттметра можно измерить мощность в симметричной трехфазной цепи. Покажем связь показания ваттметра с величиной мощности в симметричной трехфазной цепи, используя для этого топографическую диаграмму.



$$\dot{U}_W = 1.5U_\phi \angle 0^\circ, B$$

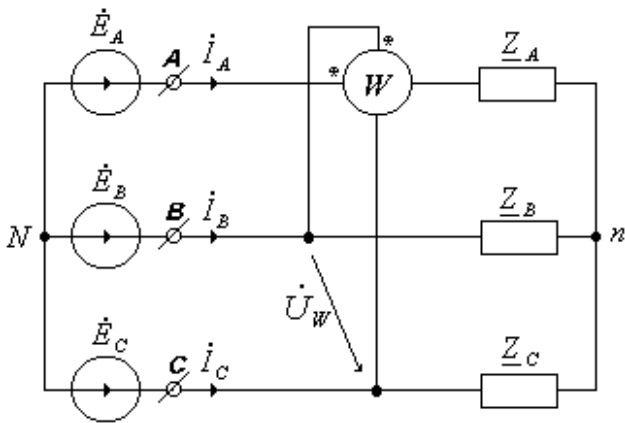
$$\Pi_W = \operatorname{Re}[\dot{U}_W^* I_a] = \operatorname{Re}[1.5U_\phi^* I_a] =$$

$$= 1.5U_\phi I_a \cos(\varphi_a) = \frac{3}{2} \cdot P_{1\phi},$$

$$P_{1\phi} = \frac{2}{3} \Pi_W, \quad P_{3\phi} = 3P_{1\phi} = 2\Pi_W.$$

С помощью одного ваттметра можно также измерить реактивную мощность в симметричной трехфазной цепи. Покажем связь показания ваттметра с величиной

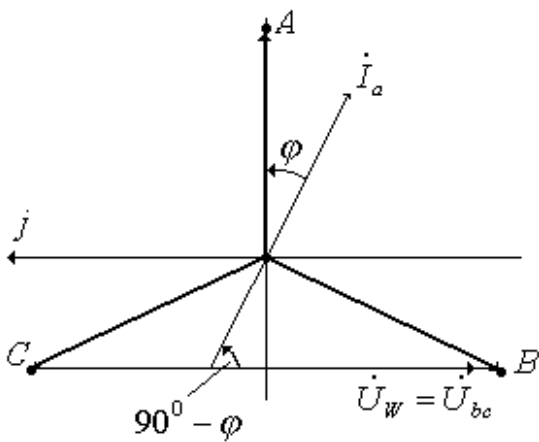
реактивной мощности в симметричной трехфазной цепи, используя для этого топографическую диаграмму.



$$\begin{aligned} P_W &= \operatorname{Re}[\dot{U}_{BC} I_A^*] = \sqrt{3}U_\phi I_\phi \cdot \cos(90^\circ - \varphi) = \\ &= \sqrt{3}U_\phi I_\phi \cdot \sin(\varphi) = \sqrt{3}Q_{1\phi} \end{aligned}$$

$$Q_{1\phi} = \frac{1}{\sqrt{3}} P_W$$

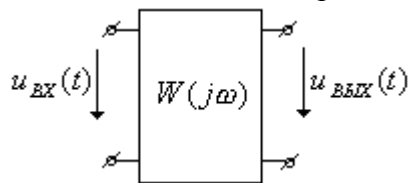
$$Q_{3\phi} = 3Q_{1\phi} = \sqrt{3}P_W$$



ЛЕКЦИЯ 9

ЦЕПИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Существует несколько видов постановки задачи анализа электрической цепи, например, требуется найти токи в ветвях схемы или найти реакцию цепи на входное воздействие. Вторая задача решается с использованием передаточной функции.



$$\dot{U}_{BYX} = W(j\omega)\dot{U}_{BX} = U_{BYX}e^{j\varphi_{BYX}}, \text{ где}$$

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} - \text{передаточная функция;}$$

$$A(\omega) - \text{амплитудно-частотная характеристика (АЧХ);}$$

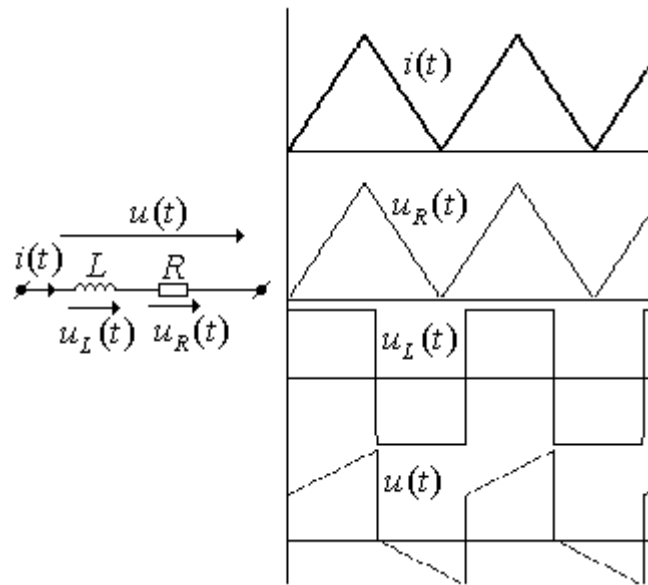
$$\varphi(\omega) - \text{фаза-частотная характеристика (ФЧХ);}$$

При действии на входе синусоидального сигнала реакция линейной цепи будет также синусоидальной. Модуль и аргумент выходного сигнала можно рассчитать по АЧХ и ФЧХ четырёхполюсника.

$$U_{BYX} = A(\omega) \cdot U_{BX}$$

$$\varphi_{BYX} = \varphi_{BX} + \varphi(\omega)$$

При действии на входе несинусоидального сигнала реакция цепи по форме будет отличаться и как следствие станет невозможным получить линейную связь величин.



Анализ установившегося режима цепи несинусоидального тока может быть сделан несколькими способами, например, численным методом или частотным методом.

Частотный метод анализа установившегося режима цепи несинусоидального тока.

Метод основан на спектральном представлении несинусоидального сигнала. Математическим аппаратом, лежащем в основе спектрального представления сигнала является ряды Фурье.

$$u(t) = \underbrace{U_0}_{\text{нулевая гармоника}} + \underbrace{U_{m1} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)}_{\text{первая или основная гармоника}} + \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{U_{mk} \sin(k\omega_1 t + \varphi_k)}_{\text{высшие гармоники}} - \text{амплитудно-фазовая форма ряда Фурье}$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{Sk} \sin(k\omega_1 t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{Ck} \cos(k\omega_1 t) - \text{тригонометрическая форма ряда Фурье.}$$

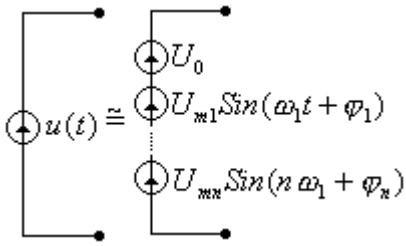
$$U_0 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt - \text{среднее за период значение сигнала;}$$

$$A_{Sk} = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(k\omega_1 t) dt - \text{синусный коэффициент ряда Фурье;}$$

$$A_{Ck} = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(k\omega_1 t) dt - \text{косинусный коэффициент ряда Фурье;}$$

$$U_{mk} = \sqrt{A_{Sk}^2 + A_{Ck}^2}$$

$$\varphi_k = \text{Arctg}\left(\frac{A_{Ck}}{A_{Sk}}\right)$$



Аппроксимация сигнала усеченным рядом Фурье

На практике для анализа цепей применение бесконечного ряда невозможно с вычислительной точки зрения. Поэтому исходный сигнал аппроксимируют усеченным рядом Фурье. Минимальное количество гармонических составляющих удерживаемых в ряде может быть определено, например, на основе следующего критерия

$$\varepsilon > \frac{U - U^*}{U}, \text{ где}$$

$$\varepsilon \ll 1,$$

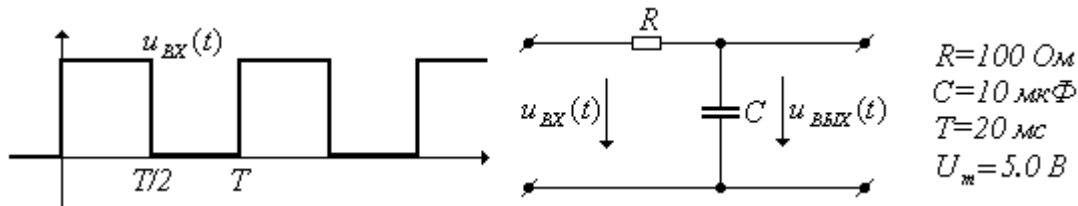
$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} u^2(t) dt} \text{ - действующее значение исходного сигнала,}$$

$$U^* = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^n U_k^2} \text{ - действующее значение суммы гармонических составляющих.}$$

Алгоритм частотного метода анализа.

1. Рассчитаем спектр входного несинусоидального сигнала;
2. Вычислим АЧХ и ФЧХ передаточной функции;
3. Вычислим реакцию цепи по методу наложения как сумму реакций на каждую гармоническую составляющую спектра входного сигнала.

Пример. Определить реакцию простейшей RC-цепи на последовательность прямоугольных импульсов.



$R=100 \text{ Ом}$
 $C=10 \text{ мкФ}$
 $T=20 \text{ мс}$
 $U_m=5.0 \text{ В}$

Решение:

1. Спектр входного сигнала.

$$\text{Нулевая гармоника } U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T U_m dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} U_m dt = \frac{U_m}{2}$$

Коэффициенты при синусных составляющих тригонометрического ряда Фурье

$$A_{Sk} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m \text{Sin}(k\omega_1 t) dt = \frac{2U_m}{T} \frac{1}{k\omega_1} [-\text{Cos}(k\omega_1 t)]_0^{T/2} =$$

$$= \frac{U_m}{k\pi} [-\text{Cos}(k\pi) - (-1)] = \frac{U_m}{k\pi} (1 - (-1)^k) = 2 \frac{U_m}{k\pi} \Big|_{k=1,3,5,7,\dots}$$

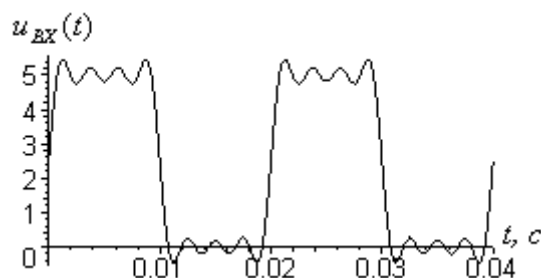
Коэффициенты при косинусных составляющих тригонометрического ряда Фурье

$$A_{Ck} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m \text{Cos}(k\omega_1 t) dt = \frac{2U_m}{T} \frac{1}{k\omega_1} [\text{Sin}(k\omega_1 t)]_0^{T/2} =$$

$$= \frac{U_m}{k\pi} [\text{Sin}(k\pi) - 0] = 0$$

Итак,

$$u_{BX}(t) \approx 2.5 + 3.1830 \text{Sin}(100\pi t) + 1.0610 \text{Sin}(300\pi t) + 0.6366 \text{Sin}(500\pi t) + 0.4547 \text{Sin}(700\pi t), \text{ В}$$

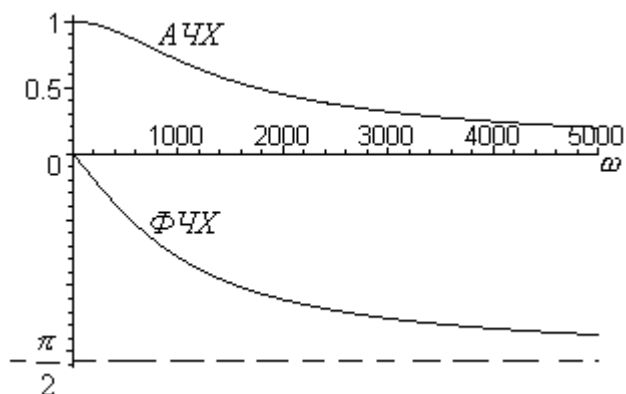


2. Передаточная функция RC - цепи.

$$W(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{\dot{I}_{\text{ВХ}}(-j\frac{1}{\omega C})}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{\dot{U}_{\text{ВХ}}(-j\frac{1}{\omega C})}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{1 + j(\omega RC)}$$

$$\text{АЧХ-}|W(j\omega)| = A(\omega) = \frac{1 - j(\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2} = \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega RC)^2}}$$

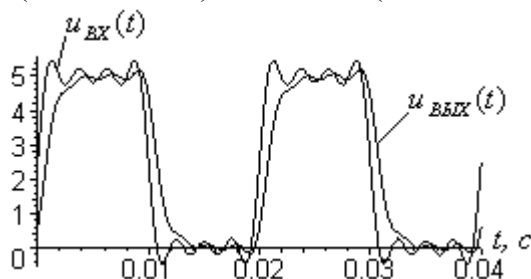
$$\text{ФЧХ-} \arg W(j\omega) = \varphi(\omega) = -\text{Arctg}(\omega RC)$$



3. Спектр выходного сигнала.

k	Амплитудный спектр входного сигнала	Частотный спектр входного сигнала	АЧХ $A(\omega)$	ФЧХ $\varphi(\omega)$, рад	Амплитудный спектр выходного сигнала	Частотный спектр выходного сигнала
0	2.5000	0	1.0000	-	2.5000	-
1	3.1830	0	0.9540	-0.3043	3.0367	-0.3043
3	1.0610	0	0.7277	-0.7557	0.7721	-0.7557
5	0.6366	0	0.5370	-1.004	0.3418	-1.004
7	0.4547	0	0.4139	-1.1440	0.1882	-1.1440

Ответ: $u_{\text{ВЫХ}}(t) \approx 2.5 + 3.0367\text{Sin}(100\pi t - 0.3043) + 0.7721\text{Sin}(300\pi t - 0.7557) + 0.3418\text{Sin}(500\pi t - 1.004) + 0.1882\text{Sin}(700\pi t - 1.1440)$



Измерение в цепях несинусоидального тока.

Для измерения действующего значения несинусоидального сигнала используют *электромагнитные приборы*. В основе принципа действия его механизма лежит взаимодействие магнитного поля измеряемого тока в неподвижном проводнике с полем одного или нескольких подвижных постоянных магнитов. Обозначаются такие приборы специальным знаком



Для измерения среднего значения несинусоидального сигнала используют *магнитоэлектрические приборы*. В основе принципа действия его механизма лежит взаимодействие магнитного поля неподвижного постоянного магнита с магнитным полем измеряемого тока, протекающего по подвижному проводнику. Обозначаются такие приборы специальным знаком

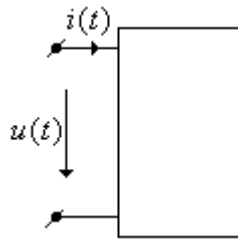


В цифровых приборах измеряется не действующее значение сигнала, а действующее значение переменной составляющей. Обозначается такой измеритель аббревиатурой **RMS (Root-Mean-Square value - среднеквадратичное значение)**. Таким образом, чтобы цифровым прибором измерить действующее значение нужно сначала измерить среднее значение U_0 , затем действующее значение переменной составляющей U_{\sim} , а затем вычислить действующее значение по формуле

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_{\sim}^2}$$

Мощность в цепи несинусоидального тока.

Рассмотрим двухполюсник на входе, которого действуют ток $i(t)$ и напряжение $u(t)$. Спектры этих величин тоже известны.



Полная мощность $S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}$

Активная мощность $P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_{\infty} = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos(\varphi_{uk} - \varphi_{ik})$

Реактивная мощность $Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin(\varphi_{uk} - \varphi_{ik})$

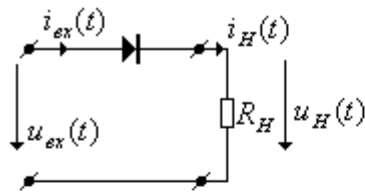
В отличие от линейных цепей синусоидального тока связь этих величин будет иной,

$$S > \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Поэтому вводят понятие мощности искажения, которая дополняет это неравенство до равенства

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2}, \text{ где } T - \text{мощность искажения, [ВА].}$$

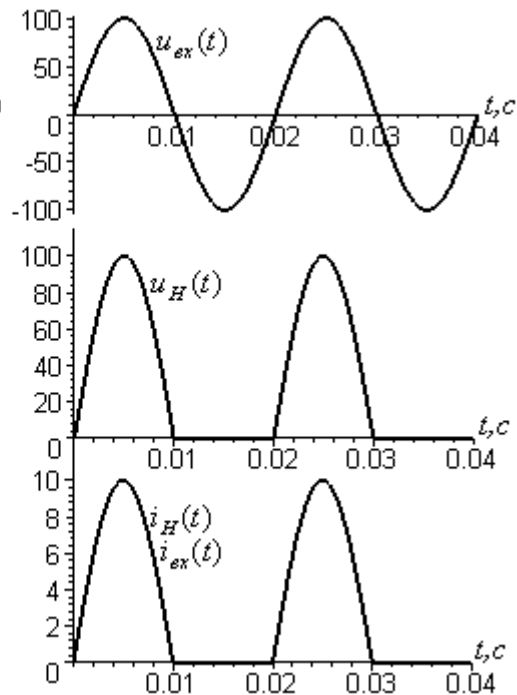
Пример. Вычислить мощность искажения на входе однополупериодного выпрямителя.



$$u_{ex}(t) = 100 \cdot \text{Sin}(100\pi t), \text{ В}$$

$$R_H = 10, \text{ Ом}$$

диод идеальный



Решение:

1. Вычислим действующее значение входного тока.

$$I_{ex} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{U_m}{R_H}\right)^2 \text{Sin}^2(\omega t) dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{U_m}{R_H}\right)^2 \text{Sin}^2(\omega t) dt} = \sqrt{\left(\frac{U_m}{R_H}\right)^2 \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} (1 - \text{Cos}(2\omega t)) dt} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{U_m}{R_H}\right)^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\pi} (\text{Sin}(2\pi) - 0)\right)} = \frac{U_m}{2R_H} = \frac{100}{2 \cdot 10} = 5.0 \text{ А}$$

2. Вычисляем полную мощность на входе выпрямителя

$$S = U_{ex} I_{ex} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{U_m}{2R_H} = \frac{U_m^2}{2\sqrt{2}R_H} = \frac{100^2}{2\sqrt{2} \cdot 10} = 353.5, \text{ ВА}$$

3. Вычисляем мощность нагрузки

$$P_H = U_H I_H = U_H I_{ex} = \frac{U_m}{2} \cdot \frac{U_m}{2R_H} = \frac{U_m^2}{4R_H} = \frac{100^2}{4 \cdot 10} = 250, \text{ Вт}$$

4. Вычисляем мощность искажения

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2}$$

$$353.5 = \sqrt{250^2 + 0^2 + T^2}$$

$$T = \sqrt{353.5^2 - 250^2} = 250, \text{ ВА}$$

Мощность искажения возникает в цепях, где формы кривых тока и напряжения не совпадают.

Вопросы по курсу ТОЭ, ч-1 для групп ЭТ-41(42)-02.

1. Основные понятия и определения теории электрических цепей.
Электрический ток и напряжение.
Положительные направления тока и напряжения.
Энергия и мощность электрического тока.
Электрическая цепь и электрическая схема.
Идеализованные элементы электрических цепей:
резистор, катушка индуктивности, взаимная индуктивность, конденсатор, источник э.д.с., источник тока.
2. Закон Ома для участка цепи, содержащей э.д.с.
3. Законы Кирхгофа.
4. Электрические цепи синусоидального тока. Характеристика синусоидальной величины. Действующее значения электрической величины.
5. Элементы R , L , C в цепи синусоидального тока. Треугольник сопротивлений. Треугольник проводимостей.
6. Мощность в цепи синусоидального тока.
7. Комплексный метод расчета электрических цепей. Изображение синусоидальной величины с помощью вращающегося вектора.
8. Комплексное изображение электрических величин и идеализованных элементов электрических цепей. Комплексные сопротивление и проводимость.
10. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме.
11. Векторные диаграммы токов и напряжений. Топографическая диаграмма напряжений (потенциальная диаграмма).
12. Комплексная форма записи мощности.
13. Баланс мощностей.
14. Методы расчета электрических цепей:
Расчет цепей по законам Ома и Кирхгофа.
Метод преобразований схем.
Метод наложения.
Метод контурных токов.
Метод узловых потенциалов.
Метод эквивалентного генератора.
Теорема взаимности. Принцип компенсации.
15. Резонанс в электрических цепях.
16. Частотные характеристики последовательного RLC-контура.
17. Резонанс в сложных цепях.
18. Условие передачи максимальной активной мощности от источника к приемнику.
19. Индуктивно связанные электрические цепи:
Одноименные зажимы индуктивно связанных катушек.
Коэффициент связи.
Комплексное представление взаимной индуктивности.
Согласное и встречное включение катушек индуктивности.
Развязка индуктивных связей.
Расчет цепей, содержащих индуктивно-связанные катушки.
21. Трансформатор:
Уравнения, схема замещения, векторная диаграмма.
Входное сопротивление трансформатора.
Совершенный трансформатор.
Идеальный трансформатор
22. Трехфазные цепи:
Схемы соединения источника.
Схемы соединения нагрузки.
Расчет симметричных трехфазных цепей.
Расчет несимметричных трехфазных цепей.
Расчет мощности трехфазной цепи. Измерение мощности.
23. Цепи периодического несинусоидального тока.
Применение ряда Фурье к расчету периодического несинусоидального тока.
Действующее и среднее значение периодической несинусоидальной функции.
Мощность в цепи периодического несинусоидального тока.